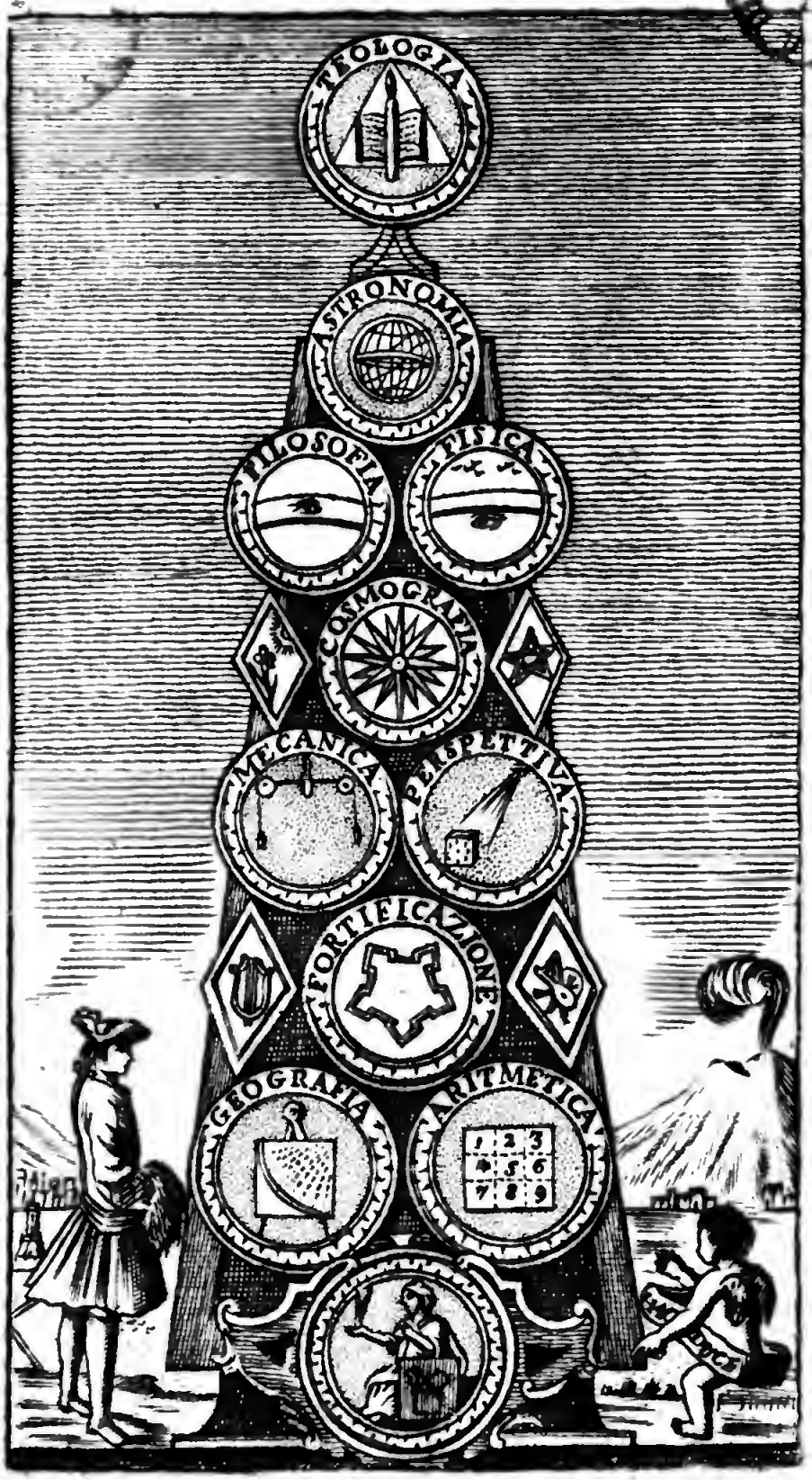
BIBL. NAZ.
Vitt. Emanuele III
Racc.
De Marinis
A
814
NAPOLI

Biblioteca Nazionale
VE
1904

Digitized by Google


TEOLOGIA
ASTRONOMIA
FILOSOFIA
FISICA
COSMOGRAFIA
MECANICA
PERSPETTIVA
FORTIFICAZIONE
GEOGRAFIA
ARITMETICA
1 2 3
4 5 6
7 8 9

DEGLI ELEMENTI

DELLA

GEOMETRIA PIANA

COMPOSTI

DA EUCLIDE MEGARESE

E tradotti in Italiano, ed illustrati

DA

D. PIETRO DI MARTINO

LIBRI VI.

Ultima Edizione correttissima.

IN NAPOLI

Con licenza de' Superiori.

1785.

LIBRO PRIMO
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE

PRIMA SORTA DI PRINCIPJ

I.

Definizioni.

IL punto è quello, il quale non ha nè grandezza, nè parti.

II.

La linea è una cosa lunga, senza esser larga.

III.

I termini della linea sono due punti.

IV.

La linea retta è quella, la quale si distende egualmente fra i suoi termini.

V.

La superficie è quella, che ha lunghezza, e larghezza solamente; e non ha profondità ovvero crassezza.

VI.

I termini della superficie sono le linee.

VII.

La superficie piana è quella, che si distende egualmente fra i suoi termini.

SPIEGAZIONE

IL corpo, il quale è l'oggetto della Geometria può essere misurato per tre versi soli, e non più

Quindi si assegnino comunemente al corpo tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità, *ovvero* crassezza. *Coteste tre dimensioni sempre si sono ritrovate, e si ritroveranno congiunte insieme in tutti i corpi; non essendosi giammai vedute nella natura cose lunghe solamente, o lunghe, e larghe senza profondità. Pur tutta volta i Geometri non hanno dubitato di separarle, e disgiungerle costituendone delle idee tutte nuove, ed ignote al volgo. In primo luogo adunque essendo stata da essi considerata la lunghezza a parte ne nacque l'idea della* linea. *Dopo essendo stata considerata da medesimi la lunghezza, e la larghezza senza la profondità, ne nacque l'idea della superficie. Quindi la superficie ha bisogno di una sola dimensione, vale a dire della crassezza per degenerare in corpo, ma la linea ne ha bisogno di due, le quali sono la larghezza, e la crassezza. Siccome poi la linea non è altro, che lunga, così si comprende di leggieri, che i suoi termini, chiamati* punti *non hanno nè grandezza nè parti.*

Chi dunque s'immaginerà nel corpo un segno indivisibile, e privo di parti, gli potrà dare con Euclide *il nome di* Punto. *Se poi s'idearà cotesto segno muoversi secondo qualsivoglia direzione, e gir lasciando una traccia, o striscia di se medesimo, egli vedrà nascere la linea, la quale sarà* dritta, *se il punto non sia giammai uscito dalla sua prima direzione, ma sarà* curva, *se il punto sia ito serpeggiando, e cangiando direzione da tempo in tempo. Finalmente se immaginerà la linea muoversi per traverso, egli vedrà nascere la* Superficie, *la quale sarà* piana, *se la linea non sia giammai uscita dalla sua prima direzione, ma sarà* curva, *se la linea sia ita cangiando direzione da tempo in tempo. Intanto è qui da avvertirsi, che* Archimede Si-

ra-

LINEA

ra — curva — parallela

cie — corpo

ANGOLO

ottuso — acuto

FIGURA

curvilinea — mistilinea

TRIANGOLO

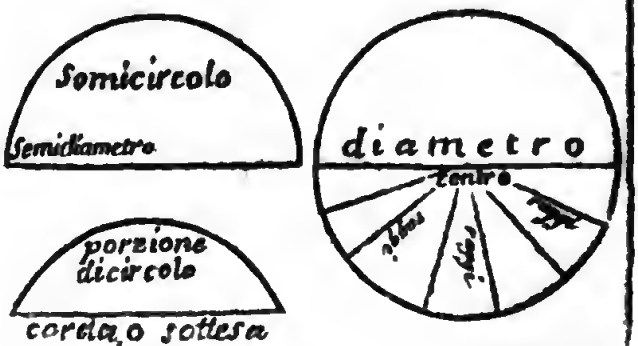
isoscele — scaleno

olo — ottusangolo — acutangolo

PARALLELOGRAMMI, o sia

bislungo — rombo — romboide

CIRCOLO



racusano, *ha definita la linea dritta così*; E' la più breve di tutte quelle che si distendono da un punto ad un' altro punto: *E che* Erone *ha definita la superficie piana dicendo* esser quella sopra di cui si può per tutt' i versi adattare una linea retta.

VIII.

Angolo piano è l' inclinazione di due linee giacenti sopra una superficie piana le quali si uniscono in un punto, e non sono poste a dirittura.

IX.

Se coteste due lipee che formano l' angolo sono diritte, dicasi l' angolo rettilineo.

SPIEGAZIONE.

Tre condizioni si richiedono per la formazione dell' angolo: I. Due linee giacenti in una superficie piana: II. Che queste due linee s' incontrino in un punto: III. Che incontrandosi non giacciano a dirittura. Quando queste tre condizioni si verifichino, si darà luogo all' angolo, il quale non è altro, che l' inclinazione scambievole delle due suddette linee. Siccome poi le due linee, che formano l' angolo possono essere entrambe rette, entrambe curve, e l' una retta, e l' altra curva, così l'angolo a non considerare altro, che le linee, dalle quali vien formato è o rettilineo, o curvilineo, o mistilineo.

X.

Quando una linea diritta cade sopra un' altra linea diritta, e forma i due angoli di qua, e di là eguali fra di loro, la suddetta linea dicesi perpendicolare a quella, sopra la quale ella cade, e ciascuno de' suoi angoli chiamasi retto.

I.

Ogni angolo maggiore del retto dicasi ottuso.

XII.

Ogni angolo minore del retto dicasi acuto,

SPIEGAZIONE.

UNa *linea dritta può cadere sopra un' altra linea dritta in due maniere, e non più;* cioè perpendicolarmente, *ed* obbliquamente, *Quindi di due cadute sono considerate da Geometri, cioe la* perpendicolare, *e l'* obbliqua. *Per distinguere l' una dall' altra fa duopo tenere questa regola. In qualunque modo che una linea cada sopra un' altra linea sempre fa con essa due angoli, uno di qua, un altro di là Ove questi due angoli siano eguali la linea dicesi* perpendicolare: *ove siano disuguali, dicesi* obbliqua Di *più quando i due angoli sono eguali, ciasciuno di essi dicesi* retto; *laddove essendo disuguali, il maggiore si chiama* ottuso, *il minore si dice* acuto. *Quindi l' angolo rettilineo per ragione della* quantità *ovvero* inclinazione *si distingue in* retto, ottuso *ed* acuto. *Non si vuol dunque confondere l' angolo rettilineo, poichè ogni angolo retto è rettilineo insieme, ma viceversa ogni angolo rettilineo, non è sempre retto: potendo essere ottuso, ed acuto*

Avvertasi qui, che siccome il carattere della perpendicolare è di fare i due angoli di qua, e di là eguali fra di loro, così essa non può essere altro, che una, di fatto un pocolino, che ella si scosti dalla sua situazione, non resta più perpendicolare, ma degenera in obbliqua. Quindi l'angolo retto parimente è uno, nè è capace di più, o di meno, laddove gli angoli ottusi, ed acuti sono infiniti, quali più ottusi, quali meno: quali più acuti, quali meno.

XIII.

XII.

Il termine è fine di qualche cosa.

XIV.

La figura è uno spazio chiuso da un termine, ovvero da molti termini.

SPIEGAZIONE.

IL punto dunque dirassi termine *della linea, e la linea* termine *della superficie. Se vi sia uno spazio chiuso intorno intorno da molte linee, o da una linea sola, dicasi cotesto spazio* Figura. *Quindi l'angolo non merita il nome di figura, perchè non è chiuso intorno intorno. Del rimanente la figura sarà* curvilinea, *se le linee terminanti lo spazio siano curve; sarà* rettilinea, *se siano rette; e sarà* mistilinea, *se alcune siano rette, altre curve.*

XV.

Il circolo è una figura piana curvilinea terminata da una sola linea, detta circonferenza che tiene un punto in mezzo, d'onde tutte le linee cadenti intorno intorno alla circonferenza sono eguali.

XVI.

Cotesto punto vien detto centro, e le linee eguali sono chiamate raaggi.

XVII.

Il diametro del circolo è una linea retta passata per lo centro, la quale giugne a toccare la circonferenza dall'una parte, e dall'altra.

XVIII.

Il semicircolo è una figura piana mistilinea terminata da mezza circonferenza, e dal diametro, che serve a lei di base.

XIX.

La porzione di circolo è una figura piana mi-

stilinea contenuta da una porzione qualsivoglia di circonferenza, e da una linea retta che le serve di base. Dicasi questa linea corda, ovvero, sottesa.

ADDIZIONE.

LA circonferenza di ogni circolo sia grande sia piccolo, s' intende da' Geometri compartita in 360. *parti eguali, le quali si chiamano* gradi: *ciascuno grado s' intende compartito in* 60. minati primi; *ciascun minuto primo in* 60. secondi; *ciascun secondo in* 60. terzi, *e così all' infinito, si distinguono coteste varie sorte di minuti per via di virgole così:*

g. ' " '''
40 30. 45. 32. *vale a dire* 40. *gradi*, 60. *minuti primi*, 45. *secondi*, *e* 32. *terzi.*

XX.

Figure rettilinee trilatere sono quelle, le quali sono terminate da tre linee rette. Queste figure si chiamano ancora Triangoli.

XXI.

Figure rettilinee quadrilatere sono quelle, le quali sono terminate da quattro linee rette.

XXII.

Figure rettilinee moltilatere sono quelle, le quali sono terminate da più di quattro linee rette.

XXIII.

Quando tutte le tre linee terminanti il triangolo sono eguali, dicasi il triangolo equilatero.

XXIV.

Quando due sole son eguali, e la terza è maggiore, o minore dicesi il triangolo isoscele.

XXV.

Quando tutte tre sono disuguali, il triangolo dicasi scaleno.

XXVI.

Quando uno de' tre angoli d' un triangolo sia retto,

retto dicasi il triangolo, rettangolo, ovvero ortogonio.

XXVII.

Ma quando un angolo sia ottuso, dicasi ottusangolo, ovvero ambligonio.

XXVII.

Finalmente quando tutti tre gli angoli sono acuti, il triangolo dicasi acutangolo, ovvero ossigonio.

SPIEGAZIONE.

Siccome ne' triangoli vi sono tre linee, e tre angoli, così vi sono sei forme diverse di triangoli, tre delle quali nascono dalla considerazione delle linee, e tre altre dalla considerazione degli angoli. Imperocchè o tutte le tre linee sono eguali, o due sole sono eguali, o tutte tre sono disuguali, e quindi tre forme di triangoli, equilatero, isoscele, e scaleno. *Inoltre o uno de' tre angoli è retto uno, o è ottuso, o tutti tre sono acuti, e quindi tre altre forme di triangoli* rettangolo, ottusangolo, e acutangolo. *Notisi quì, che per chiamarsi un triangolo rettangolo, ovvero ottusangolo, basta che un angolo sia retto, ovvero ottuso; ma per darsi acutangolo, sia duopo, che tutti tre gli angoli siano acuti: di modo che un triangolo, il quale tiene due angoli acuti, ed uno retto, ovvero ottuso, prende il nome dall' ottuso, o dal retto, e non già da due acuti.*

XXIX.

Il Quadrato è una figura quadrilatera, che tiene tutti gli angoli retti, e tutte le linee eguali.

XXX

Il Bislungo è una figura quadrilatera, che tiene tutti gli angoli retti, ma non ha tutte le linee eguali.

XXXI.

Il Rombo è una figura quadrilatera, che

tiene tutte le quattro linee eguali, ma non già gli angoli retti.

XXXII.

Il Romboide è una figura quadrilatera che tiene le quattro linee eguali, nè gli angoli retti; ma ha solamente i lati e gli angoli opposti eguali.

XXXIII.

Ogni altra figura quadrilatera diversa dal quadrato, dal bislungo, dal rombo, e dal romboide, dicasi Trapezio.

SPIEGAZIONE.

TUtte *le forme delle figure quadrilatere si riducono a cinque. Perchè supponendo primieramente, che tutti gli angoli siano retti: o tutti i lati sono eguali, e la figura quadrilatera sarà un* quadrato, *o sono disuguali, e sarà un* bislungo. *Supponendo poi, che gli angoli non siano retti, se i quattro lati sono eguali, la figura quadrilatera sarà un* rombo, *se i lati opposti solamente sono eguali, sarà un* romboide: *Ogni altra figura quadrilatera diversa dalle quattro suddette, sarà* Trapezio.

XXXIV.

Linee rette parallele sono due linee giacenti in una superficie piana, le quali distese da ambe le parti all'infinito non s'incontrano giammai. *Ovvero* sono due linee giacenti in una superficie piana, le quali portate innanzi quanto ci piaccia, sempre mantengono l'istessa distanza: *Per questa ragione sogliono ancora chiamarsi* ugualmente distanti.

SPIEGAZIONE.

DUe condizioni si richieggono, *perchè due linee si chiamino parallele. I. Che stiano a giacere*

se sopra una superficie piana : quindi due linee situate in diversi piani non saranno giammai parallele. II. Che distese da ambe le parti all'infinito non s'incontrino giammai : dico da ambe le parti ; perchè due linee non parallele da una sola parte si uniscono, che più tosto si vanno più allargando.

XXXV.

Il Parallelogrammo è una figura quadrilatera, che tiene i lati opposti paralleli. *Quindi tutte le figure quadrilatere dal trapezio in fuori sono parallelogrammi.*

SECONDA SORTA DI PRINCIPJ.

DIMANDE.

I.

SI dimanda, che due punti si possano unire con una linea retta.

II.

Si dimanda inoltre, che una linea retta terminata possa portarsi tanto innanzi quanto bisogna.

III.

Si dimanda finalmente, che da un dato punto come centro, e con un dato raggio possa descriversi una circonferenza di circolo.

TERZA SORTA DI PRINCIPJ.

ASSIOMI.

I.

DUe cose se sono eguali ad una medesima cosa, sono eguali fra di loro. Ed una medesima cosa se è maggiore, o minore dell' una di due cose eguali sarà eziandio maggiore, o minore dell' altra.

II.

Aggiungendo cose eguali a cose eguali, ovvero aggiungendo l' istessa cosa a cose eguali, le somme riescono eguali.

III.

Viceversa da cose eguali togliendo cose eguali, ovvero l' istessa cosa, gli avanzi riescono eguali.

IV

A cose ineguali aggiugnendo cose eguali, ovvero l' istessa cosa, le somme rimangono ineguali.

V.

Viceversa da cose ineguali togliendo cose eguali, ovvero l' istessa cosa, gli avanzi riescono ineguali.

VI.

Le cose duple, triple, quadruple, dell' istessa cosa sono eguali.

VII.

Le cose sudduple, suttriple, suqquatruple dell' istessa cosa sono parimente eguali.

VIII.

Le cose, le quali soprapposte l' una all' altra combaciano a puntino senza superarsi sono eguali.

IX.

Il tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti; e tutte le parti riunite insieme sostituiscono il tutto.

X.

Due linee rette si tagliano in un solo punto senza più.

XI.

Due linee rette non possono chiudere spazio. *Quindi non hanno luogo tra le figure rettilinee le bilatere; ma le prime a doversi considerare sono le trilatere.*

XII

XII.

Tutti gli angoli retti sono eguali.

XIII.

Se due linee rette giacenti in una superficie piana sono segate da una terza linea retta, e siano i due angoli interiori dalla medesima parte, minori di due angoli retti, le due linee non saranno parallele, ma portate innanzi verso quella parte, dove gli angoli interiori sono minori di due angoli retti, si verranno finalmente ad incontrare.

DE' PROBLEMI, E DE' TEOREMI.

EUclide *ha esposti gli elementi della Geometria per via di* Proposizioni, *alcune delle quali portano il titolo di* Problemi, *altre di* Teoremi: *Problema è* una proposizione in cui si vuol fare qualche cosa. *Teorema è* una proposizione in cui si vuol dimostrare qualche verità ignota.

Così il Problema, come il Teorema ha tre parti, con questa differenza però, che tutte tre sono essenziali al Problema; laddove una di esse può mancare al Teorema. Queste parti sono: I. Proposizione. II. Costruzione. III. Dimostrazione, *delle quali la seconda talvolta è necessaria al Teorema, e talvolta no.*

PROP. I. PROBLEMA.

Sopra una data linea retta terminata descrivete un triangolo equilatero.

I.

Sia data la linea retta AB terminata ne'punti, A e B; fa duopo descriverci sopra un triangolo equilatero, *FIG.* 1.

II.

di n. 3. *Col centro A, e col raggio AB* * *descrivasi il circolo BCD.*

* *dim.* 3. *Col centro B, e col raggio BA descrivasi* * *l'altro circolo ACE.*

* *dim.* 1. *Dal punto C, dove le circonferenze de due circoli già descritti si segano, si congiungono* * *le linee rette CA, CB.* Io dico, che il triangolo ACB descritto sopra la data AB sia equilatero.

III.

Siccome dalla costruzione il punto A è il centro del circolo ACD, così le due linee
* *def.* 15. AB, AC saranno * eguali. Similmente siccome dalla costruzione B è il centro del circo-
* *def.* 15. lo ACE, così le linee AB. BC saranno * eguali. Laonde essendo così AC, come BC egua-
* *ass.* 1. le alla medesima AB, saranno * le due AC, BC eguali fra di loro. Il perchè il triangolo ACB sarà equilatero. Ciocchè dovea farsi.

PROP. II PROBLEMA.

Adattare ad un punto dato una linea dritta eguale ad un' altra linea data.

I.

FIG. 2. Sia dato un punto A, e sia data inoltre la * linea diritta BC, fa duopo adattare al punto A una linea retta eguale alla data BC.

II.

* *dim.* 1. *Si uniscono* * *i due punti A, e B colla retta*
* *pr.* 1. *AB, sopra la quale si formi* * *il triangolo equilatero ADB.*

* *dim.* 2. *I lati DA, DB si portino* * *innanzi verso E, e verso F.*

* *dim.* 3. *Dal centro B, col raggio BC descrivasi* * *il circolo CGH.*

* *dim.* 3. *Dal centro D, col raggio DG descrivasi* * *il*

cir-

circolo GLK. Io dico, che la linea retta AL adattata al punto A sia eguale a la data BC.

III.

Siccome dalla costruzione D è il centro del circolo GLK, così le due linee DG, DL sone * eguali fra di loro. Ma per cagione del* *def.* 15. triangolo equilatero ADB le due linee DB, DA sono ancora eguali; dunque dalle due eguali DG, DL togliendo le due ancora eguali DB, DA, gli avanzi * BG, AL, saranno si-* *ass.* 3. milmente eguali. Quindi essendo * la BC egua-* *def.* 15. le alla BG; perchè il punto B dalla costruzione è il centro del circolo CGH, sarà così la BC, come la AL eguale alla medesima BG: laonde le due BC, AL saranno * eguali fra di* *oss.* 1. loro. Ciocchè dovea farsi.

PROP. III. PROBLEMA.

Date due retti disuguali tagliare dalla maggiore una parte eguale alla minore.

I.

Siano date due linee rette disuguali AB mag-*FIG.* 3 giore, e CD minore, fa duopo tagliare dalla maggiore una parte eguale alla minore.

II.

Adattisi al dato punto A la linea AE egua-* *pr.* 2. *le alla data CD.*

Dal centro A, col raggio AE descrivasi il* *dim.* 3. *circolo EFG.* Io dico, che la retta AF tagliata dalla maggiore AB sia eguale alla minore CD.

III.

Siccome dalla costruzione A è il centro del circolo EFG, così saranno * le due AE, AF* *def.* 15. eguali fra di loro. Ma dalla costruzione la AE è eguale parimente alla G ; dunque essendo ciascuna delle due AF, CD eguali alla medesima

* *ass.* 1. ma AE saranno * esse eguali fra di loro. Cioc. chè dovea farsi.

PROP. IV. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, e gli angoli contenuti sotto questi lati ancora eguali: avranno la base eguale alla base, sarà il triangolo eguale al triangolo: e saranno gli altri due angoli eguali agli altri due angoli, ciascuno a ciascuno, e quelli propriamente, che sono sottoposti a' lati eguali.

I.

FIG. 4. Abbiano i due triangoli ABC, DEF i due lati AB AC eguali a due lati DE, DF ciascuno a ciascuno: vale a dire AB eguale a DE, ed AC eguale a DF, ed abbiano di più i due angoli BAC, EDF contenuti sotto i suddetti lati eguali fra di loro. Io dico, che la base BC sarà eguale alla base EF; che il triangolo ABC sarà eguale al triangolo DEF, e che gli altri due angoli ABC, ACB, saranno eguali agli altri due angoli DEF, DFE ciascuno a ciascuno, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE.

II.

Intendasi il triangolo ABC accavallato al triangolo DEF, in modo che il punto A si unisca col punto D, ed il lato AB resti disteso sopra il lato DE. Perchè dalla supposizione l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF, siccome il lato AB si distende sul lato DE; così l'altro lato AC è forza, che si distenda sul lato DF. In oltre poichè dalla supposizione i due lati AB, AC sono eguali a due lati DE, DF ciascuno a ciascuno; i due punti B, e C debbono per necessità unir-

unirsi co' due punti E, ed F, quindi la base BC distenderassi sulla base EF. Nè qui dica taluno, che la base BC cada sopra sotto la base EF siccome si vede nella figura. Imperciocchè ove ciò seguisse, due linee rette chiuderebbero spazio contra l'assioma XI. Cadendo dunque i tre punti A, B, C, sopra i tre punti D, E, F, combaceranno insieme così le basi, come i triangoli, come gli angoli; laonde saranno eguali fra di loro *: cioccchè dovea dimostrarsi. * ass. 8.

PROP. V. TEOREMA.

Se s' intendano i due lati eguali de' triangoli isosceli portati innanzi sotto la base; saranno i due angoli sotto la base eguali fra di loro, e gli angoli sopra la base ancora saranno eguali.

I.

Siano i due lati AB, BC del triangolo isoscele BAC distesi verso D, e verso E; io dico, che i due angoli DBC, ECB sotto la base BC sono eguali tra di loro; e che i due angoli ABC, ACB sopra l'istessa base BC sono parimente eguali. FIG. 5.

II.

Prendasi ad arbitrio nella BD qualsivoglia punto F.

Dalla maggiore AE taglisi la parte AG eguale alla minore AF. * pr. 3.

*Si congiungano * i punti F, e C. G, e B col.* le linee rette FC, GB.* ** dim. 1.

III.

Perchè dalla supposizione AB è eguale ad AC, e dalla costruzione AC è eguale ad AF, saranno i due lati BA, AG del triangolo BAG eguali a' due lati CA, AF del triangolo CAF ciascuno a ciascuno; sicchè essendo l'angolo BAG contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale

lo all'angolo CAF contenuto sotto i lati del se-
condo triangolo: sarà * la base BG eguale alla
* *pr. ant.* base CF; l'angolo ABG eguale all'angolo ACF,
e l'angolo AGB eguale all'angolo AFC.

Inoltre essendo dalla costruzione AG eguale
ad AF, e dalla supposizione AC eguale ad
* *ast.* 3. AB sarà *, l'avanzo CG eguale all'avanzo
BF; ma si è dimostrato la BG eguale alla
CF; dunque i due lati CG; GB del triango-
lo CGB saranno eguali a' due lati BF, FG
del triangolo BFC ciascuno a ciascuno quin-
di essendosi parimente dimostrato l'angolo
pr. ant. CGB eguale all'angolo BFC, sarà * l'ango-
lo GCB eguale all'angolo FBC, i quali angoli sono sotto la base del triangolo isoscele ABG e l'angolo GBC sarà eguale all'angolo FCB; ma si è dimostrato tutto l'angolo ABG eguale all'angolo ACF; dunque togliendo dall'angolo ABG l'angolo GBC, e dall'angolo ACF, l'angolo FCB, l'avanzo ABC sarà egua-
art. 3. le * all'avanzo ACB, i quali sono gli angoli sopra la base: ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollario.

Siccome ne' triangoli l'elezione della base è arbitraria, così i triangoli equilateri si possono stimare tre volte come isosceli, prendendo successivamente ciascuna delle tre linee eguali per base. Quindi tutti gli angoli de' triangoli equilateri saranno eguali fra di loro. Ora poichè questa verità si deduce immediatamente dalla proposizione antecedente, ragionevolmente tiene luogo di Corollario: *Imperciocchè i Geometri chiamano Corollario* una proposizione, che si deduce immediatamente da un'altra proposizione.

PROP.

PRO. VI. TEOREMA.

Se due angoli di un triangolo siano eguali fra di loro; ancora i lati sottoposti a detti angoli saranno eguali.

I.

Siano i due angoli ABC ACB del triangolo ABC eguali fra di loro; io dico che i lati AB, AC sottoposti a detti angoli siano parimente eguali. *FIG. 6.*

II.

Se è possibile, sia il lato AB maggiore del lato AC.

Si tagli dunque dal maggiore BA la parte BD eguale al minore AC. **pr. 3.*

Si unisca la DC *dim. 1.

III.

E perchè dalla costruzione BD è uguale a CA, e BC è comune; saranno i due lati DB, BC del triangolo DBC, eguali a' due lati AC, CB del triangolo A B ciascuno a ciascuno; quindi essendo dalla supposizione l'angolo DBC eguale all'angolo ACB sarà il triangolo minore BDC eguale al triangolo maggiore ACB, il che è contrario all'assioma IX. Sicchè rimane vero il Teorema in quistione. **pr. 4.*

Due cose sono quì da avvertirsi, che questa proposizione è conversa della quinta, vale a dire, che la supposizione della quinta è conseguenza nella sesta, e la conseguenza nella quinta è supposizione della sesta, che la dimostrazione della suddetta proposizione sia negativa: di fatto non si sono già dimostrati positivamente i due lati AB, AC eguali fra di loro; ma si è fatto vedere, che ove potessero essere disuguali, sarebbe la parte eguale al tutto.

Corollario.

Se un triangolo ha tutti i tre angoli eguali egli sarà equilatero.

PROP VII. TEOREMA.

Se da' termini di una linea retta siano tirate due linee rette, le quali si vadino ad unire in un punto: è impossibile, che dagl' istessi termini, e dall' istessa parte si possano tirare due altre linee rette eguali alle due prime, ciascuna a ciascuna, le quali si vadino ad unire in un punto diverso dal punto suddetto.

I.

FIG. 7. Da' termini A, e B della linea retta AB s'intendono tirate due linee AC, BC, le quali si uniscano nel punto C. Io dico, che dagl' istessi termini, e dall'istessa parte non si possono tirare due altre linee eguali alle due già tirate AC, BC, ciascuna a ciascuna, le quali si abbiano da unire in un punto diverso dal punto C.

II.

Se mai sia possibile; se ne possono tirare due altre, le quali siano AD, BD, in modo che AC sia eguale ad AD, e BC sia eguale a BD.

* *dim.* 1. *Si congiunga CD**.

III.

Poichè si vuole, che AC, sia eguale ad AD, il triangolo ACD sarà isoscele; il perchè * *pr.* 5. * l'angolo ACD sarà eguale all' angolo ADC; * *ass.* 9. laonde essendo l'angolo BC maggiore* dell' angolo ADC; sarà l' istesso angolo BDC mag. * *ass.* 1. giore dell' angolo ACD, e per conseguente molto maggiore dell' angolo BCD; ma l'an- * *pr.* 5. golo BDC è uguale * all' angolo BCD; perchè si vuole, che BD sia eguale a BC: dunque i due angoli BDC, BCD, una volta sono disuguali, e un' altra volta eguali; ciocchè

chè non potendo sussistere rimane vero il Teorema in quistione.

Corollario.

Da qui segue, che se due triangoli sono costituiti sopra una medesima base, ed hanno i due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno; i detti triangoli debbono cadere giustamente l'uno sull'altro.

PROP. VIII. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali ai due lati, ciascuno a ciascuno, la base eguale alla base: sarà l'angolo contenuto sotto i lati dell'uno eguale all'angolo contenuto sotto i lati dell'altro.

I.

Abbiamo i due triangoli BAC, DEF, i due lati AB, AC eguali a due lati DE, DF ciascuno a ciascuno, e la base BC eguale alla base EF; io dico che l'angolo BAC sia eguale all'angolo EDF. FIG. 8.

II.

Si accavalli il triangolo ABC sul triangolo DEF, in modo che la base BC resti distesa sulla base EF, e i punti B, e C si uniscono co punti E, ed F,

E poichè dalla supposizione i due lati BA, AC sono eguali a due lati ED, e DF ciascuno a ciascuno; il punto A si andrà ad unire col punto D per lo Corollario della proposizione antecedente. Laonde l'angolo BAC combacerà coll'angolo EDF; e quindi gli sarà * eguale * ciocchè dovea dimostrarsi. ass. 3.

Annotazione.

Le proposizioni IV. ed VIII. si accordano in questo, che si suppone in entrambe i due lati es-

sere

sere eguali a' due lati ciascuno a ciascuno; discordano in ciò, che nella IV. dall' eguaglianza degli angoli contenuti sotto i lati eguali si deduce l' eguaglianza delle basi; e nell' VIII. viceversa dall' eguaglianza delle basi si deduce l' eguaglianza de' due angoli suddetti.

PROP. IX. PROBLEMA.

Dividere un' angolo rettilineo dato in due parti eguali.

I.

FIG. 9. Sia dato l' angolo rettilineo BAC; fa duopo dividerlo in due parti eguali.

II.

Prendasi nella AB qualsivoglia punto D,
* pr. 3. *Dalla maggiore AC tagliasi * la AE eguale ad AD.*
* dim. 1. *Si congiunga la * DE, e sopra a questa si*
* pr. 1. *formi il triangolo equilatero DFE *.*
* dim. 1. *Si unisca ** AF. Io dico, che l' angolo BAF rimane diviso in due parti eguali da questa linea retta AF.

III.

Imperciocchè, siccome dalla costruzione la AD è eguale alla AE, e la AF è comune; così i due lati *DA*, *AF* del triangolo DAF saranno eguali a' due lati EA, AF del triangolo EAF ciascuno a ciascuno. Quindi essendo la base DF del primo triangolo eguale alla base FE dell' altro triangolo, poichè esse sono lati del triangolo DFE, il quale dalla
* pr. ant. costruzione è equilatero: sarà * l' angolo DAF contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all' angolo EAF contenuto sotto i lati dell' altro triangolo; ciocchè dovea farsi.

PROP.

PROP. X. PROBLEMA.

Di una linea retta terminata data farne due parti eguali.

I.

Sia data la linea retta AB terminata ne' punti A, e B; fa duopo tagliarla in due parti eguali. *FIG.* 10.

II.

Descrivasi sopra la data AB il triangolo equilatero ACB* * *pr.* 1.

*L'angolo ACB si tagli * in due parti eguali colla retta CD.* * *pr. ant.* Io dico, che questa linea retta CD divide la data AB in due parti eguali.

III.

Perchè dalla costruzione i lati CA, CB del triangolo equilatero ACB sono eguali, e CD è lato comune; saranno i due lati AC, CD, del triangolo ACD eguali a' due lati BC, CD del triangolo BCD ciascuno a ciascuno. Quindi essendo dalla costruzione l'angolo ACD contenuto sotto i lati del primo eguale all' angolo BCD contenuto sotto i lati dell'altro triangolo, sarà * la base AD eguale alla base DB, ciocchè dovea farsi. * *pr.* 4.

Avvertimento comune alle due ultime proposizioni.

Diviso che sia un' angolo, e una linea in due parti eguali si può dividere ciascuna di esse in due altre parti eguali, e se ne avranno quattro: di più ciascuna delle quattro si può dividere in due parti eguali, e se ne avranno otto: e così all' infinito.

PROP. XI. TEOREMA.

Da un punto dato in mezzo ad una linea retta innalzarvi sopra una linea perpendicolare.

I.

FIG. 11. Sia data in linea retta AH. e in mezzo ad essa sia dato l punto C; fa duopo innalzare dal dato punto C una linea perpendicolare alla data AH.

II.

Prendasi nella AC un punto ad arbitrio come D.

* *pr.* 3. *Dalla maggiore CH taglisi* * *la parte CE eguale alla minore* CD.

* *pr.* 1. *Sopra la DE descrivasi* * *il triangolo equilatero* DFE.

Si uniscano i punti * *F, e C colla linea retta*

* *dim.* 1. FC. Io dico, che questa sia perpendicolare sopra la data AH.

III.

Imperciocchè essendo dalla costruzione la DC eguale alla GE, e la CF comune, saranno i due lati CF, CD nel triangolo CFD eguale a' due lati CF, CE del triangolo CFE Quindi essendo a cagion del triangolo equilatero DFE la base DF del primo triangolo eguale alla base EF dell' altro triangolo: sarà * l'angolo FCD eguale all' angolo FCE

* *pr.* 8. Facendo dunque la linea retta FC gli angoli di qua, e di là eguali fra di loro per la definizione x. sarà perpendicolare alla data AH. Ciocchè dovea farsi.

PROP. XII. PROBLEMA:

Da un punto dato fuori di una linea farvi cadere sopra una perpendicolare.

I.

FIG. 12. Sia dato il punto C fuori della linea AB; fa duopo dal punto dato C far cadere sopra la suddetta AB una linea perpendicolare.

II.

Prendasi dall' altra parte della linea AB per ri-

riguardo al dato punto C un punto qualsivoglia G.

*Del centro C, col raggio CG descrivasi * il circolo EGF.* * dim. 3.

*La retta EF, la quale rimane racchiusa dentro del circolo tagliasi * in due parti eguali nel punto H.* * pr. 10.

*Dal punto C, al punto H si congiunga * la linea retta CH.* Io dico, che questa sia perpendicolare alla data AB. * dim. 1.

III.

Siccome dalla costruzione la HE è eguale alla HF, e la HC è comune: così saranno i due lati HE, HC del triangolo EHC eguale a' due lati HF, HC del triangolo FHC ciascuno a ciascuno. Quindi essendo la base EC del primo triangolo eguale alla base FC dell'altro triangolo; perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza, sarà * l'angolo CHE eguale all'angolo CHF. Sicchè la linea CH sarà * perpendicolare alla data AB. Ciocchè dovea farsi. * pr. 8. * def. 10.

Ove il punto C, date fuori dalla linea AB sia situato in modo, che riesca impossibile il far cadere da esso una perpendicolare sopra la suddetta AB, bisognerà per la seconda dimanda portare tanto innanzi la linea AB, quanto basti per poervi far cadere la perpendicolare.

PROP. XIII, ASSIOMA.

Una linea retta, la quale insiste sopra un'altra linea retta, forma i due angoli di qua, e di là o retti, ovvero eguali a due retti.

SPIEGAZIONE.

Questa proposizione mi sembra tanto chiara, FIG. 13.

che io non dubito di metterla nel numero degli assiomi, comecchè essa nel testo di Euclide *porti il titolo di* Teorema. *E' noto, che una linea retta può cadere sopra un' altra linea retta in due maniere* perpendicolarmente, *ed* obbliquamente. *Cadendoci perpendicolarmente i due angoli di qua e di là saranno retti entrambi; cadendoci obliquamente egli è il vero, che uno di essi sia ottuso, e l' altro acuto: tuttavolta, perchè di quanto l' ottuso sopravvanza il retto, di altrettanto ne manca l' acuto, compensandosi l' eccesso dell' uno col difetto dell' altro, rimane ne' due angoli il valore di due retti. Così cadendo la EB perpendicolarmente sopra la DC, i due angoli EBD, EBC sono retti entrambi; ma cadendo la AB obbliquamente sopra la DC, i due angoli ABD, ABC sono eguali a due retti. E quindi è facile a dedurne, che se due linee rette si segano, i quattro angoli fatti intorno al punto del segamento, siano o retti ovvero eguali a quattro angoli retti.*

PROP. XIV. TEOREMA.

Se dal termine di una linea retta si tirino alle parti opposte due linee rette le quali formino colla data i due angoli di qua e di là, o retti, ovvero eguali a due retti, le sue suddette linee giaceranno a dirittura, nè formeranno angolo.

I.

FIG. 14 *Dal termine A della linea retta AB siano tirate alle parti opposte due linee BC, BD, ma con tale legge, che li due angoli di qua, e di là ABC, ABD siano, o retti, ovvero eguali a due retti.* Io dico, che le suddette linee BC BD giaceranno a dirittura: vale a dire, che BCD sia una sola linea retta.

II.

II.

Se è possibile, non sia CBD una retta linea, ma CB portata innanzi, vada continuarsi nella BE. Perchè la retta AB cade sopra la retta CBE, saranno * i due angoli ABC, ABE eguali a due retti: ma dalla supposizione ancora i due angoli ABC, ABD sono eguali a due retti; dunque i due angoli ABC, ABE saranno ** eguali a due angoli ABC, ABD: Se ne levi via l'angolo comune ABC: rimarrà * l'avanzo ABE; vale a dire la parte eguale al tutto; ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

* *pr. ant.*

** *ass.* 1.

* *ass.* 3.

PROP. XV. TEOREMA.

Se due linee rette si segano scambievolmente gli angoli opposti al vertice saranno eguali fra di loro

I.

Seghinsi le due linee rette AB, CD scambievolmente nel punto E; io dico, che tanto gli angoli AEC, BED, quanto gli angoli AED, BEC opposti al vertice E; siano eguali tra di loro. FIG. 15.

II.

Siccome la retta AE cade sulla retta CD, così gli angoli di qua, e di là AED, AEC saranno * eguali a due retti. Parimente, siccome la retta DE cade sopra la retta AB, così gli angoli di qua, e di là DEB, DEA saranno * eguali a due retti. Quindi i due primi angoli AED, AEC saranno * eguali a due secondi DEB, DEA: Se ne levi via l'angolo comune AED; rimarrà * l'avanzo AEC eguale all'avanzo BED. Nell'itsessa maniera si dimostrerà, che l'angolo AED sia eguale all'angolo BEC; di modo che rimane vero il Teorema in quistione.

* *pr.* 13.

* *pr.* 13. * *ass.* 1.

* *ass.* 3.

Pre.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se il lato BC del triangolo ABC si distende verso D; si vedrà nascere fuori del triangolo ACD, il quale dicesi esteriore, *a differenza de' tre angoli CAB, ABC, BCA, i quali si chiamano* interiori. *Ora di questi tre angoli interiori l'angolo ACB, che giace accanto all'esteriore dicesi* interiore adiacente, *il quale, se è retto, sarà eguale all'esteriore: se è ottuso, sarà maggiore dell'esteriore; se acuto sarà minore dell'esteriore: di modo che può accadere, che l'esteriore sia o eguale, o minore, o maggiore dell'interiore adjacente. Gli altri due angoli interiori si chiamano* interiori opposti.

PROP. XVI. TEOREMA.

In ogni triangolo, se si distende un lato qualsivoglia; l'angolo esteriore sarà sempre maggiore dell'uno e dell'altro angolo interiore opposto.

I.

FIG. 16 Sia il triangolo ABC, il di cui lato BC si distenda verso D. Io dico, che l'angolo esteriore ACD è maggiore così dell'angolo CAB, come dell'angolo ABC, che sono i due interiori opposti.

II.

* *pr.* 10. *Tagliasi AC* * *in parti eguali nel punto E.*
* *dim.* 1. *Si unisca* * *BE.*
* *dim.* 2. *Si distenda* * *EE verso F.*
* *pr.* 2. *Si tagli EF* * *eguale a BE.*
* *dim.* 1. *Si unisca* * *CF.*

III.

Dalla costruzione AE è eguale ad EC, e BE è eguale ad EF; dunque i due lati AB, EB del triangolo AEB sono eguali a due lati CE, EF,

del

del triangolo CEF ciascuno a ciascuno: quindi essendo l'angolo AEB contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale * all'angolo CEF* *pr.* contenuto sotto i lati del secondo triangolo; sarà * l'angolo EAB eguale all'angolo ECF,* *pr. 4.* i quali due angoli sono sottoposti a'lati eguali. Ma l'angolo esteriore ACD è maggiore ** *ass. 9.* dell'angolo ECF; dunque l'istesso angolo esteriore ACD sarà * maggiore dell'angolo EAD,* *ass. 1.* ovvero CAB. Nell'istessa maniera distendendo il lato AC verso G si farà vedere per mezzo di due triangoli AEB, FEC, che l'angolo esteriore ECG sia maggiore dell'interiore opposto AEC: laonde, siccome l'angolo ACD è eguale * all'angolo BCG, così sarà il medesimo angolo ACD maggiore * del* *pr. ant.* *ass. 1.* l'angolo ABC; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XVII. TEOREMA.

Gli angoli di qualsivoglia triangolo presi a due a due sono sempre minori di due retti.

I.

Sia il triangolo ABC; io dico, che i suoi tre angoli comparati a due a due, vale a dire ABC, e BCA; BCA, e CAB; CAB, ed ABC, sono minori di due angoli retti. *FIG. 17.*

II.

*Si distenda * il lato BC verso D.* **dim. 2.*

III.

Siccome l'angolo esteriore ACD è maggiore dell'angolo interiore opposto * ABC, così aggiu * *pr. ant.* gnendo ad essi l'istesso angolo ACB, riuscirà la* *ass. 4.* somma de'due angoli ACD, ACA, maggiore della somma de'due angoli ABC, ACB Quindi essendo i due angoli ACD, ACB eguali a due retti *: saranno per necessità gli altri due an-* *pr. 13.* goli ABC, ACB minori di due retti. Nell'

istes-

istesso modo si mostrerà, che gli angoli BC*A*, CAB sono minori di due retti. Ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se i due lati di un triangolo siano disuguali; gli angoli sopra la base saranno parimente disuguali, e quell' angolo sarà maggiore, il quale sta dirimpetto al lato maggiore.

I.

FIG. 18. Nel triangolo *ABC*, sia il lato *AC* maggiore del lato *AB*; io dico che gli angoli *ABC*, *ACB* sopra la base BC non sono eguali; ma che sia maggiore l'angolo *ABC*, il quale sta dirimpetto al lato maggiore *AC*.

II.

* *pr.* 3. *Taglisi* * *dal lato maggiore AC la parte AD eguale al minore AB.*

* *dim.* 1. *Si unisca* * *BD.*

III.

Siccome il lato CD del triangolo BCD è * *pr.* 16. disteso verso A, così sarà * l'angolo esteriore *BDA* maggiore dell' interiore opposto DCB; ma essendo dalla costruzione *AD* eguale ad * *pr.* 5. *AB*, l' angolo *ABB* è eguale * all' angolo * *ass.* 1. *ABD*; dunque sarà l'angolo *ABD* maggiore * parimente dell'angolo DCB; e perciò l'angolo *ABC* sarà molto maggiore dell'angolo DCB ovvero *ACB*. Ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollario.

Quindi ne' triangoli scaleni tutt' i tre angoli sono disuguali, e quell' angolo il quale sta dirimpetto al lato maggiore, sarà il più grande di tutti gli altri.

PROP.

PROP. XIX. TEOREMA.

Se gli angoli sopra la base di qualsivoglia triangolo siano disuguali; i lati sottoposti a questi angoli non saranno già eguali, ma quel lato sarà maggiore, il quale sta dirimpetto all' angolo maggiore.

I.

Nel triangolo ABC, che ha BC per base; sia l' angolo ABC maggiore dell' angolo ACB; io dico, che il lato AC, il quale sta dirimpetto all' angolo maggiore ABC è maggiore dell' altro lato AB. *FIG.* 19.

Imperciocchè non può essere il lato AB eguale al lato AC, poichè sarebbe * l' angolo ACB eguale all' angolo ABC contra la supposizione. Nemmeno può essere il lato AB maggiore del lato AC, poichè * sarà l' angolo ACB maggiore dell' angolo ABC parimente contro la supposizione; di modo che il lato AC sia maggiore del lato AB. * *pr.* 5. * *pr. ant.*

Corollario.

Quindi, se un triangolo ha tutti tre gli angoli disuguali, egli sarà scaleno, e quel lato sarà il maggiore, il quale sta dirimpetto all' angolo maggiore. Questa Proposizione è conversa dell' antecedente.

PROP. XX. TEOREMA.

I lati di qualsivoglia angolo presi a due a due sono sempre maggiori del lato rimanente.

I.

Sia il triangolo CBA. Io dico, che i due lati BC, BA sono maggiori del lato rimanente CA; e che i due lati BC, CA sono maggio- *FIG.* 20.

giori di BA; e che finalmente i due lati CA, AB sono maggiori di CB.

II.

* *dim.* 2. *Distendasi* * *AB verso D.*
* *pr.* 3. *Si tagli BD eguale* * *a BC,*
* *dim.* 1. *Si unisca DC* * .

III.

Siccome dalla costruzione la BD è eguale
* *pr.* 3. alla BC; così sara * l'angolo DCB eguale all'angolo CDB: ma l'angolo DCA è maggio-
* *ass.* 9. re * dell'angolo DCB: dunque l'istesso an-
* *ass.* 1. golo DCA sarà ancora * maggiore dell'angolo CDB, ovvero CDA. Quindi essendo gli angoli sopra la base CD del triangolo ADC
* *pr.* 19. disuguali, saranno * i lati ad essi sottoposti ancora disuguali, e propriamente sarà AD maggiore di AC. Ma AD è eguale a due lati AB, BC; perchè dalla costruzione BD, eguale a BC: dunque i due lati AB BC; sa-
* *ass.* 1. ranno parimente maggiori * del lato rimanente CA: ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se da' termini della base di un triangolo si tirino due linee rette, le quali si vadano ad unire dentro il suddetto triangolo. Saranno le due linee insieme minori de' due lati del triangolo uniti insieme. Ma l'angolo contenuto sotto le medesime linee sarà maggiore dell'angolo contenuto sotto i due lati del triangolo.

FIG. 21. Da' termini A, e B della base AB del triangolo ACB *escano due linee AD, BD, le quali si vadano ad unire nel punto D, che sia dentro al triangolo* ACB. Io dico, che le due linee AD, DB insieme sono minori de' due lati AC, CB del triangolo ACB; ma che l'angolo ADB sia maggiore dell'angolo ACB.

II.

II.

Si distenda AD * *sino al punto E.* * *dim.* 2.

III.

Nel triangolo *ACE* i due lati *AC*, CE sono maggiori * del rimanente *AE*: il perchè aggiungendo comunemente il lato EB; saranno i due lati *AC*, CB maggiori * de' due *AE*, EB. *Inoltre* i due lati DE, EB del triangolo DEB sono maggiori * del rimanente DB: dunque aggiugnendo comunemente il lato *AD*; saranno i due lati *AE*, EB * maggiori de' due *AD*, BD. Laonde essendosi dimostrati i due *AC*, CB maggiori de' due *AE*, EB; ne segue, che i detti lati *AC*, CB sono molto maggiori di *AD*, BD. * *pr.* 10. * *ass.* 4. * *pr.* 20. * *ass.* 4.

II. Nel triangolo A E il lato CE è disteso verso B; quindi l'angolo esteriore * *AEB* è maggiore dell' interiore opposto *ACE*. Inoltre nel triangolo BED il lato ED è disteso verso *A*; quindi l'angolo esteriore * BD*A* è maggiore dell'angolo BED: ma si è già dimostrato l'angolo FED maggiore dell' angolo ECA, ovvero BC*A*; dunque l'angolo BD*A* sarà molto maggiore dell'angolo BC*A*, ciocchè dovea dimostrarsi. * *pr.* 16. * *pr.* 16.

PROP. XXII. PROBLEMA.

Di tre linee rette date, formarne un triangolo.

I.

Siano date tre linee rette, A, B, e C; fa*FIG.* 22, duopo formare un triangolo,

II.

Tirisi la linea diritta indefinita DH.

Si taglino * *le parti DF, FG, GH, eguali rispettivamente alle date, A, B, e C.* * *pr.* 3.

Da' centri F, e G co' raggi FD, GH si descrivano * *i due circoli KD, KH.* * *dim.* 3.

Si congiungano * *le due linee KF, KG* Io di- * *dim.* 1.

eo,

co, che il triangolo KFG abbia i suoi tre lati eguali, rispettivamente alle linee diritte date A, B, e C.

III.

Siccome dalla costruzione F è il centro del circolo DK, così sarà * DF eguale ad FK: ma dall'istessa costruzione DF è eguale ad A; dunque * sarà FK eguale ad A. Similmente, siccome dalla costruzione G è il centro del circolo HK, così sarà GH eguale a GK; ma dall'istessa costruzione GH è eguale a C; dunque sarà * GK eguale a C; ma dalla costruzione la FG è eguale a B: dunque i tre lati KF, FG, GK del triangolo KFG sono eguali rispettivamente alle tre linee A, B, C; ciocche dovea farsi.

* *def.* 15.
* *ass.* 1.
* *def.* 15.
* *ass.* 1.

Annotazione.

Siccome in ogni triangolo i lati presi a due a due sono maggiori del rimanente, così, acciò di tre linee rette date se ne possa comporre un triangolo, è duopo, che esse siano tali, che accoppiate a due a due siano maggiori della terza altrimenti il Problema riuscirebbe impossibile. Se le tre linee date sono eguali, il triangolo riuscirebbe equilatero, e la costruzione non sarebbe diversa dalla costruzione della proposizione I.

PROP. XXIII. PROBLEMA.

Data una linea retta, ed in essa un punto, fa duopo adattare a questo punto una linea, la quale comprenda colla data un angolo eguale ad un angolo dato.

I.

FIG 23. Sia data la linea retta AB, ed in essa sia dato il punto A. fa duopo adattare al punto A una linea, la quale comprenda colla data AL un angolo

golo eguale all'angolo dato EDF.

II.

Si prendano nelle due linee DE, DF due punti ad arbitrio E, ed F. * *dim.* 1.

Si unisca EF *

Dalle tre linee DE, EF, FD, due delle quali sono maggiori * *della rimanente, se ne formi* * *pr.* 2.

il triangolo ABD in modo che AB sia eguale a DE: AC sia eguale a DF, e BC sia eguale ad EF: Io dico, che l'angolo BAC sia eguale all'angolo EDF. *pr. ant.*

III.

Imperciocchè dalla costruzione i due lati BA, AC del triangolo BAC sono eguali a' due lati ED, DF del triangolo EDF, ciascuno a ciascuno, e la base BC è eguale alla base EF: il perchè sarà * l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; Ciocchè dovea farsi. *pr.* 3.

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali a' due lati ciascuno a ciascuno, e l'angolo contenuto sotto i lati di uno di essi maggiore dell'angolo contenuto sotto i lati dell altro; avranno la base maggiore della base.

I.

Abbiano i due triangoli ABC, DEF i due lati AB, AC eguali a' due lati DE, DF ciascuno a ciascuno; ma sia l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF: io dico, che la base BC sia maggiore della base EF. *FIG.* 94

II.

Si faccia l'angolo FDG eguale all'angolo CAB* *pr.* 24.

Taglisi DG eguale ad AB, ovvero a DE,* *pr.* 3.

Si congiungano GE, GB. * *dim.* 1.

III.

Siccome dalla costruzione DG è uguale a
pr. 5. DE, così sarà * l'angolo DGE eguale all'angolo DEG, onde, siccome l'angolo FEG è
* *ass* 9. maggiore dell'angolo * DEG: così sarà lo
* *ass.* 1. stesso angolo FEG * maggiore dell'angolo FGE; e per conseguente sarà molto maggiore dell'angolo FGE. Quindi nel triangolo FGE, essendo gli angoli FEG, FGE sopra la base GE disuguali, saranno i lati sottoposti a' detti angoli * disuguali, e propriamente
* *pr.* 19. sarà FG maggiore di FE. Ora, siccome dalla costruzione DG è uguale ad AB, e dalla supposizione DF è uguale ad AC; così saranno i due lati DG, DF del triangolo GDF, eguali a' due lati AB, AC del triangolo BAC, ciascuno a ciascuno; sicchè, essendo l'angolo GDE dalla costruzione eguale all'angolo BAC, sarà * la base GF eguale alla base BC. Ma
* *pr.* 4. si è dimostrata GF maggiore di EF; dunque ancora BC sarà maggiore di EF. Ciocchè do-
* *ass.* 1. vea dimostrarsi.

PROP. XXV. PROBLEMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali a' due lati ciascuno a ciascuno. E la base maggiore della base; sarà l'angolo contenuto sotto i lati del primo triangolo maggiore dell'angolo contenuto sotto i lati dell'altro.

I.

FIG. 25. Abbiano i due triangoli BAF, CDE i due lati AB AF, eguali a' due lati DC, DE ciascuno a ciascuno; ed abbiano inoltre la base BF maggiore della base CE; io dico, che l'angolo BAF sia maggiore dell'angolo CDE.

I.

Se sia possibile, sia primieramente l'angolo BAF eguale all'angolo CDE. Quindi i due

tran-

triangoli FAF, CDE avendo i due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, e l'angolo contenuto sotto i lati del primo eguale all'angolo contenuto sotto i lati dell'altro; avranno * la base eguale alla base contra la suppo * *pr.* 4.
sizione. Sia in secondo luogo l'angolo BAF minore dell'angolo CDE; Quindi i due triangoli avendo i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l'angolo contenuto sotto i lati del primo minore dell'angolo contenuto sotto i lati dell'altro, sarà la base BF minore * della base CE; il che parimente è con- * *pr. ant.*
tra la supposizione. Non potendo dunque essere la base *BF* nè eguale, nè minore della base CE, rimane, che sia maggiore: ciocche dovea dimostrarsi.

Questa proposizione conviene colla passata in questo, che si suppone in entrambe essere i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, discorda però in questo, che nella passata dall'essere l'angolo contenuto sotto i due lati maggiore dell'angolo contenuto sotto gli altri due lati, si è dedotto, che la base sia maggiore della base, e quì viceversa dall'essere la base maggiore della base, si è dedotto, che l'angolo suddetto sia maggiore dell'angolo.

PROP. XXVI TEOREMA.

Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, o che questi lati eguali siano accanto agli angoli eguali, o che stiano dirimpetto a due di essi, avranno l'altre cose eguali alle altre cose.

I.

Abbiano i due triangoli ABC, DEF due angoli ABC, ACB eguali a due angoli DEF, DFE ciascuno a ciascuno; ed abbiano inoltre o il lato BC adjacente a due angoli ABC, ACB egua- *FIG.* 26.

le al lato EF ancora adjacente agli altri due angoli DEF, DFE ovvero il lato AB, che sta dirimpetto ad uno di essi ACB eguale al lato DE, che sta dirimpetto all' angolo corrispondente DFE, io dico, che il rimanente angolo BAC sia eguale all' angolo rimanente EDF; che gli altri due lati siano eguali agli altri due lati ciascuno a ciascuno; e che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEF.

II.

I. Mettendo in primo luogo, che il lato BC adjacente a' due angoli eguali sia eguale al lato EF adjacente agli altri due angoli, *se il lato BA non è eguale al lato ED, si faccia* * *BG eguale ad ED, o si unisca* * *IG*. Quindi, siccome dalla costruzione GB è eguale ad ED e dalla supposizione BC è eguale ad EF, così saranno i due lati EG, EC del triangolo GBC eguali a' due lati ED, EF del triangolo DEF, ciascuno a ciascuno: il perchè essendo dalla supposizione l' angolo GBC eguale all' angolo *DEF*; sarà * l' angolo GCB eguale all' angolo DFE: ma per la supposizione ancora l' angolo ACB è eguale all' angolo DFE; dunque sarà l' angolo GCB minore, eguale all' angolo ACB maggiore ciocchè non potendo sussistere, ne segue; che AB debb' essere eguale ad ED. Il perchè i due triangoli BAC, EDF avendo i due lati BA, FC eguali a' due lati ED, EF ciascuno a ciascuno e l'angolo ABC eguale all' angolo DEF, avranno * tutte le altre cose eguali fra di loro.

* *pr.* 3. * *dim.* 1. * *pr.* 4. * *pr.* 5.

II. Mettendo poi, che il lato A, che sta dirimpetto all' angolo ACB sia eguale al lato DE, che sta dirimpetto all' angolo corrispondente DFE *se il lato BC non è eguale al lato EF, si faccia* * *BH eguale ad EF, e si unisca* * *AH*. Quindi essendo dalla supposizione AB eguale a

* *pr.* 3. * *dim.* 1.

DE

DE, e della costruzione BH eguale ad EF; saranno i due lati AB, EH del triangolo ABH eguali a' due lati DE, EF del triangolo DEF ciascuno a ciascuno; il perchè essendo dalla supposizione ancora l'angolo ABH eguale all'* angolo EDF: sara * l'abgolo AHB eguale all' angolo DFE; ma dalla supposizione l'angolo ACB è similmente eguale all'angolo DFE; dunque * sarà l'angolo AHB esteriore eguale* all' interiore opposto ACB; ciocchè non poten. do sussistere * ne segue, che BC sia egua.* le ad EF. Quindi i due triangoli ABC, DEF avendo i due lati AB, BC eguali a' due lati DE, EF, e l'angolo ABC eguale all'angolo, DEF, avranno * tutte le altre cose eguali a tutte le altre cose. Ciocchè dovea dimostrarsi. *pr.* 4. *ass.* 1. *pr.* 16 *pr.* 4.

Questa proposizione ha due parti, le quali io soscriva quì separatamente per togliere ogni confusione: I. Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, ed il lato adiacente a due primi angoli eguale al lato adiacente a due secondi; avranno tutte le altre cose eguali alle altre cose; *di modo che paragonata questa proposizione colla IV. si scorga, che l' una è perfettamente conversa dell'altra*: II. Se due triangoli hanno due angoli eguali a' due angoli ciascuno a ciascuno, ed il lato, che sta dirimpetto all'uno de' due angoli eguale al lato, che sta dirimpetto all'angolo corrispondente, avranno tutte le altre cose eguali.

Preparazione alle proposizioni seguenti.

*Se due linee * AB, CD sono segate della ter-Veggaza EFG si vedranno nascere otto angoli, quattrosi la fide' quali sono interiori, e quattro altri sono esteriori. Ora è da sapersi: I. che due interiori AFG, la prop.*

DGD, ovvero BFG, FGC posti uno di qua, e l'altro di là della linea segante si chiamano alterni: II. *che i due interiori AFG, FGC, ovvero BFG, FGD si chiamano* interiori della medesima parte: III. *che l due angoli EFA, FGC, ovvero EFB, FGD si chiamano* esteriori, ed interiori della medesima parte,

PROP. XXVII TEOREMA.

Se due linee giacenti in una superficie piana siano segate da una terza linea, e siano gli angoli alterni eguali fra di loro, le suddette linee saranno parallele.

I.

FIG. 27. Le due linee rette *AB*. CD siano segate dalla terza linea EF, e siano gli angoli alterni AFF, EFD eguali fra di loro: io dico, che le due suddette linee AB, CD siano parallele.

II.

Se sia possibile, non siano le linee AB; CD parallele; ma si vadano ad unire nel punto G, e costituiscano il triangolo EBG DF. il qual triangolo, come si vede, è forzato, Perchè il lato GBE, di questo triangolo è
pr. 26. disteso verso A, sarà l'angolo esteriore AEF maggiore dell'interiore opposto EFD: il che non potendo sussistere, essendo contrario alla supposizione, la quale vuole, che l'angolo AEF sia eguale all'angolo EFD, ne segue che il Teorema in quistione sia vero.

PROP. XXVIII. TEOREMA.

Se due linee rette giacenti sopra una superficie piana sono segate da una terza linea, e sia l'angolo esteriore eguale all'angolo interiore, ed opposto dalla medesima parte, le suddette linee saranno

ranno parallele, e se gl' interiori dalla medesima parte sono eguali a due retti, le medesime linee saranno parallele.

I.

Le due linee rette AB, CD siano segate dalla terza EFG, io dico, che esse sono parallele, o che l'angolo esteriore EFB sia eguale all' interiore, ed opposto FGD dalla medesima parte; o che i due interiori dalla medesima parte EFG, FGD siano eguali a due retti. FIG. 28.

II.

I. Perchè dalla supposizione l'angolo EFB è eguale all' angolo FGD, ed il medesimo angolo EFB è eguale all' angolo AFG * saranno i due angoli AFG, FGD eguali fra di loro * ma sono alterni: dunque le linee AB, CD saranno parallele. * pr. 15. * ass 1. * pr. ant.

II. Inoltre, perchè dalla supposizione i due angoli EFG, FGD sono eguali a due retti; e sono ancora eguali a due retti gli angoli BFG, AFG * saranno i due angoli EFG, BGD eguale a' due angoli BFG, AFG. Il perchè togliendone via il medesimo angolo BFH, rimarrà * l'angolo FGD eguale all'angolo AFG: sicchè essendo essi alterni, le linee AB, CD saranno * parallele. Ciocchè dovea dimostrarsi. * pr. 13. * ass. 3. * pr. ant.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Se due linee rette parallele sono segate da una terza linea, saranno gli angoli alterni eguali fra di loro, sarà l' angolo esteriore eguale all' anteriore, ed opposto dalla medesima parte; saranno i due interiori dalla medesima parte eguali a due retti.

I.

Le due linee parallele AB, CD siano segate dalla terea linea EFG. Io dico, che gli angoli alterni AFG, FGD sono eguali fra di loro: di più FIG. 29.

che l'angolo esteriore EFB è uguale all'interiore, ed opposto dalla medesima parte FGD: e finalmente, che i due interiori BFG, FGD dalla medesima parte sono eguali a due retti.

I.

I. Se sia possibile, non siano gli angoli alterni AFG, FGD eguali fra di loro; ma sia il primo maggiore del secondo. Aggiungendo dun-
* *ass.* 4. que ad essi il medesimo angolo BFG, saranno i due angoli AFG, BFG maggiori degli angoli
* *pr.* 13. DGF, BFG; ma gli angoli AFG, BFG sono* eguali a due retti: dunque gli angoli DGF
* *ass.* 13. BFG sono minori di due retti; laonde le due linee AB, CD portate innanzi si andranno ad unire contra la supposizione.

II. Essendo dunque l'angolo *A*FG eguale all'angolo FGD, e di più essendo l'angolo
* *pr.* 15. EFB eguale * all'angolo AFG, sarà l'angolo esteriore EFB eguale all'interiore; ed opposto dalla medesima parte FGD.

III. Finalmente, essendo l'angolo E*F*B eguale all'angolo FGD; aggiunto ad entrambi il medesimo angolo B*F*G, saranno i due angoli EFB, BFG eguali a' due angoli FGD, B*F*G; ma i due primi angoli EFB, EFG sono eguali
* *pr.* 13. a' due retti *; dunque saranno eguali a due retti ancora gli angoli FGD, BFG: ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXX. TEOREMA.

Se due linee sono parallele ad una terza, saranno parallelele fra di loro.

I.

FIG. 30. Siano le due linee AB, CD parallele alla terza EF; io dico, che esse saranno parallele fra di loro.

II.

II.

Si tiri la linea GHI, la quale seghi tutte tre le suddette linee ne' punti G, H, ed I.

III.

Perchè alla supposizione la AB è parallela alla EF: saranno * gli angoli alterni AGH, HIF eguali fra di loro. Inoltre, perchè la retta CD è parallela ad EF; sarà * l'angolo esteriore GHD eguale all'interiore, ed opposto dalla medesima parte HIF. Quindi essendo così l'angolo AGH, come l'angolo GHD eguale al medesimo angolo HIF, saranno i suddetti angoli * AGH, GHD eguali fra di loro. Ma sono alterni: dunque le linee AB, CD sono parallele. Ciocchè *si* dovea dimostrare.

* *pr.* 29.

* *pr.* 29.

* *ass.* 1.

* *ass.* 1.

PROP. XXXI TEOREMA.

Per un punto dato tirare una linea retta parallela ad un'altra linea retta.

I.

Sia dato il punto A, e sia data parimente la linea BC, fa duopo per lo punto dato A tirare una linea retta parallela alla data BC.

FIG. 31.

II.

Si prenda nella BC il punto D ad arbitrio.

Si unisca la AD *.

*Si costituisca l'angolo DAF eguale * all'angolo ADC.*

*Si distende PA * verso E.* Lo dico * che la retta FE sia parallela alla *BC.*

* *dim.* 1.

* *pr.* 23.

* *dim.* 2.

III.

Imperocchè, siccome dalla costruzione i due angoli alterni FAD, ADC sono uguali fra di loro, così le linee FE; BC saranno ** parallele.

** *pr.* 27.

PROP.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Se uno de' lati di un triangolo sia disteso oltre: sarà l' angolo esteriore eguale a' due angoli interiori opposti. E tutti i tre angoli del triangolo saranno eguali a due retti.

I.

FIG. 32. *Il lato BC del triangolo ABC sia disteso verso D*; io dico, che l' angolo esteriore ACD sia eguale a' due interiori opposti CBA, BAC; e che i tre angoli ABC, BCA, CAB del triangolo ABC sono eguali a due retti.

II.

* *pr. ant.* *Tirisi* * *per lo punto C la retta CE parallela alla retta BA.*

III.

I. Perchè le due linee parallele CE, BA sono segate dalla terza CA; saranno gli angoli alterni * ACE, CAB eguali fra di loro. Inoltre, perchè le due linee parallele BA, CE, sono segate dalla terza BD, sarà l' angolo esteriore ECD * eguale all' interiore opposto dalla medesima parte ABC: quindi aggiugnendo cose eguali a cose eguali, riuscirà tutto l' angolo esteriore ACD eguale a' due interiori opposti CBA, BAC.

* *pr.* 29.

* *pr.* 29.

II. Essendo l' angolo ACD eguale a' due angoli CBA, BAC, sarà, aggiugnendo il medesimo angolo ACB, la somma de' due angoli ACD, ACB eguale a tre angoli CBA, BAC, ABC; ma i due angoli ACD, ACB sono eguali * a' due retti: dunque i tre angoli CBA, ABC, ACB sono parimente eguali a' due retti; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* 13.

PROP.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Se due lati opposti di un quadrilatero sono eguali, e paralleli, gli altri due lati saranno eguali, e paralleli.

I.

Siano i due lati opposti AB ; DC del quadrilatero ABDC eguali, e paralleli ; io dico che gli altri due AD , BC sono parimente eguali, e paralleli. *FIG.* 33.

II.

Si unisca * *la linea AC.* * *dim.* 1.

III.

Siccome dalla supposizione la AB è eguale alla DC , e la AC è eguale alla CA ; così saranno i due lati BA, AC del triangolo ABC eguali a' due lati DC, CA del triangolo DCA ciascuno a ciascuno : il perchè essendo ancora l'angolo BAC eguale all' angolo AC , perchè sono alterni delle parallele AB , DC ; sarà ** la base BC eguale alla base AD , e l'angolo ACB sarà eguale all' angolo CAD; ma questi angoli sono alterni delle linee BC , AD : dunque dette linee sono ancora parallele * Cioc- chè dovea dimostrarsi. ** *pr.* 4 * *pr.* 27.

Corollario.

Quindi acciò una figura quadrilatera sia parallelogramma, basta, che due lati opposti siano eguali, e paralleli.

PROP. XXXIV. TEOREMA.

In ogni figura parallelogramma i lati opposti sono eguali fra di loro. Gli angoli opposti sono parimente eguali : La diagonale divide il parallelogramma in due triangoli eguali.

I. Nel

I.

FIG. 34. Nel parallelogrammo ABCD, io dico, che i lati opposti AB, AD, e DC, e BC sono eguali fra di loro: di più, che gli angoli opposti DAB, e DCB; ADC, ed ABC sono eguali fra di loro. Finalmente, che la diagonale AC divide il parallelogrammo ABCD in due triangoli ADC, ABC eguali fra di loro.

I.

Siccome la AB è parallela alla DC, così gli pr. 29. angoli alterni BAC, ACD * sono eguali fra di loro. Inoltre, siccome la BC è parallela alla AD, così gli angoli alterni BCA; DAC pr. 29. sono * ancora eguali: quindi i due angoli BAC, BCA del triangolo BAC saranno eguali a' due angoli ACD, DAC del triangolo DCA ciascuno a ciascuno: il perchè essendo di più il lato AC adjacente a' due primi angoli eguale al lato CA adjacente agli altri due angoli; saran- pr. 26. no * le altre cose eguali alle altre cose: vale a dire il lato AB eguale al lato DC, il lato BC eguale al lato A, l'angolo ABC eguale al triangolo ADC, e finalmente il triangolo ABC eguale al triangolo CDA: ora essendosi già dimostrato l'angolo BAC eguale all'angolo ACD; e l'angolo DAC eguale all'angolo ACB, aggiugnendo cose eguali a cose eguali, * ass. 2. riuscirà * l'angolo DAB eguale all'angolo DCB; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXXV. TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti nella medesima base, e fra le medesime parallele, sono eguali fra di loro.

I.

FIG. 35. Siano i due parallelogrammi ABCD, EBCF costituiti nella medesima base, BC e fra le mede-

sime parallele *AF*, *BG*; io dico, che cotesti due parallelogrammi sono eguali fra di loro.

II.

Siccome la *AD* è eguale * alla *BC*, e la *BC* è eguale * alla EF; così saranno le due *AD*, EF eguali fra di loro. Aggiugnendo dunque ad esse la medesima *DE*, sarà la AE eguale alla *DF*; ma la *AB* è eguale * alla *DC*; dunque li due lati *AE*, *AB* del triangolo *BAE* saranno eguali a' due lati DF, DC del triangolo DF*C* ciascuno a ciascuno: quindi essendo per cagione delle linee parallele *AB*, *DC*, l'angolo interiore *BAE* * eguale all' esterio- re opposto dalla medesima parte GDF; sarà * il triangolo *ABE* eguale al triangolo *DCF*. Togliendone dunque il medesimo triangolo DG*E*; sarà * l' avanzo *ABGD* eguale al' avanzo *EGCF*: finalmente aggiugnendo il medesimo triangolo *BGC* *; riuscirà tutto il parallelogrammo *ABCD* eguale al parallelogrammo *EBCF*. Ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr. ant.*
* *pr. ant.*
* *pr. ant.*
* *pr.* 29
* *pr.* 4.
* *ass.* 3.
* *ass.* 2.

PROP. XXXVI. TEOREMA.

I parallelogrammi costituiti sopra basi eguali, e fra le medesime parallele sono eguali fra di loro.

I.

I due parallelogrammi *ABCD*, EFGH siano costituiti sopra le due basi eguali BC, FG, e fra le medesime parallele BG, AH, io dico, che essi sono eguali fra di loro. *FIG.* 36.

II.

Si uniscano * *le due AF, DG.* * *dim.* 1.

II.

Perchè dalla supposizione la BC è eguale alla FG, e per cagione del parallelogrammo ABCD la AD è uguale * ancora a BC, saranno le due AD, FG eguali fra di loro; quindi nel quadrilatero AFGD essendo i due lati opposti AD, FG

* *pr.* 34.

egua-

* *Corol. della pr.* 33. eguali, e paralleli esso sarà * parallelogrammo. Poichè dunque i due parallelogrammi BADC, FADG sono costituiti sopra la medesima base AD, e fra le medesime parallele BG, AD saranno i detti due parallelogrammi * eguali fra di loro. Similmente, perchè i due parallelogrammi AFDC, EFGH sono costituiti sopra la medesima base FG, e fra le medesime parallele FG, AH, essi saranno * eguali fra di loro. Quindi i due parallelogrammi ABCD. EFGH saranno* ancora eguali; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr. ant.*

* *ass.* 1.

PROP. XXXVII. TEOREMA.

I triangoli costituiti sopra la medesima base, fra le medesime parallele sono eguali fra di loro.

I.

FIG. 37. I due triangoli ABC, DCB siano costituiti sopra la medesima base BC, e fra le medesime parallele AD, BC; io dico, che essi sono eguali fra di loro.

II.

* *pr.* 31. *Per li punti B, e C si tirino* * *le linee rette BD, CF parallele respettivamente alle due AC, BD.*

* *dim.* 2. *Si distende* * *la AD dall' una parte, e dall' altra, finchè s' incontri colle paralliele suddette ne' punti E, ed F.*

III.

Perchè i due parallelogrammi EBCA, DBCF sono costituiti sopra la medesima base BC e fra le medesime parallele BC, EF saranno * essi eguali fra di loro: ma i triangoli ABC, DCB sono rispettivamente la metà * de' parallelogrammi EBCA, DBCF; dunque saranno parimente eguali * i triangoli ABC, DCB; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* 35

* *pr.* 34.

* *ass.* 7.

PROB.

PROP. XXXVIII. TEOREMA.

I triangoli costituiti sopra eguali basi, e fra le medesime parallele, sono eguali fra di loro.

I.

I due triangoli ABC, DEF siano costituiti sopra le basi eguali BC, EF, e fra le medesime parallele BF, GH; io dico, che essi sono eguali fra di loro. *FIG.* 38

II.

Si tirino * *per li punti B, ed F le linee rette BG, FH parallele respettivamente alle due CA, ED.* * *pr.* 3.

III.

Perchè i due parallelogrammi GBCA, DEFH sono costituiti sopra le basi eguali BC, EF, e fra le medesime parallele BF, GH, essi saranno * eguali fra di loro: ma i triangoli * *pr.* 36
ABC, DEF sono la metà * respettivamente * *pr.* 34.
de' parallelogrammi GBCA, DEFH; dunque ancora i triangoli ABC, DEF * sono eguali: * *ass.* 7.
ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXXIX. TEOREMA.

I triangoli eguali costituiti sopra la medesima base, e della medesima parte, sono fra le medesime parallele.

I.

I triangoli eguali ABC, DCB siano costituiti sopra l'istessa base BC, e dalla medesima parte; io dico, che la linea retta AD è parallela alla BC. *FIG.*

II.

Se mai è possibile, non sia la AD parallela alla BC.

Per lo punto A dunque tirisi * *la AE parallela alla BC.* * *pr.* 31

Si

* *dim.* 1. *Si congiunga* * *la EC.*

III.

Perchè i due triangoli *ABC*; *ECB* sono costituiti sopra la medesima base *BC* e fra le
* *pr.* 37. medesime parallele; essi saranno * eguali; ma dalla supposizione al triangolo DCB è parimente eguale al triangolo *ABC*; dunque il
* *ass.* 1. triangolo minore *ECB* sarà eguale * al maggiore DCB; ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

PROP. XL. TEOREMA.

I triangoli eguali costituiti sopra eguali basi; le quali giacciano a dirittura, e dalla medesima parte sono fra le medesime parallele.

I.

FIG. 40. I triangoli AF*D*, *EDF* eguali siano costituiti sopra le basi eguali *BD*, DF poste a dirittura, e dalla medesima parte; io dico, che la linea *AE* sia parallela alla *BF*.

II.

* *pr.* 31. Se mai è possibile, non sia la *AE* parallela alla *BF*.

dim. 1, *Tirisi* * *dunque per lo punto A la AG parallela alla BF.*

Si congiunga la GF *

III.

Perchè i due triangoli *ABD*, *GDF* sono costituiti sopra le basi eguali *BD*; DF; e fra le medesime parallele *AG*, *BF*, essi saranno
* *pr.* 38. * eguali fra di loro. Ma dalla supposizione il triangolo *EDF* è parimente eguale al triangolo *ABD*; dunque il triangolo minore GDF sarà eguale al maggiore *EDF*; ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

PROP.

PROP. XLI. TEOREMA.

Se un parallelogrammo, ed un triangolo sono costituiti sopra la medesima base, e fra le medesime parallele, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.

I

Il parallelogrammo ABCD, ed il triangolo EBC siano costituiti sopra la medesima base BC, e fra le medesime parallele AE, BC; io dico, che il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo EBC. *FIG.* 41

II. * *dim.* 1.

Si unisca * *la retta AC.*

III.

Perchè i due triangoli ABC, EBC sono costituiti sopra la medesima base BC, e fra le medesime parallele AE, FC, essi saranno** eguali fra di loro. Ma il parallelogrammo ABCD è * doppio del triangolo ABC: * dunque il medesimo parallelogrammo ABCD sarà doppio * del triangolo EBC. Ciocchè dovea dimostrarsi. ** *pr.* 37. * *pr.* 34. * *ass.* 1.

PROP. XLII. PROBLEMA.

Costituire un parallelogrammo, il quale sia eguale ad un triangolo dato, ed abbia un angolo eguale ad un angolo dato.

I.

Sia dato il triangolo ABC; e sia dato l'angolo D; fa d'uopo costituire un parallelogrammo, che sia eguale al triangolo ABC, ed abbia un angolo eguale all'angolo dato D. *FIG.* 42.

I.

Taglisi * *la BC in parti eguali nel punto E.* * *pr.* 23.

Si costituisca * *al punto E l'angolo CEF eguale all'angolo dato D.* * *pr.* 23.

Per gli punti C, ed A si tirino * *le linee ret-* * *pr.* 31.

le CG, AG parallele rispettivamente alle linee EF, BC. Io dico, che il parallelogrammo FECG sia eguale al triangolo dato ABC, e tenga un angolo eguale all'angolo dato D.

* *dim.* 1. *Congiungasi* * *AE.*

Poichè dalla costruzione le basi *AE*, EC
* *pr.* 38. sono eguali, saranno * eguali i due triangoli ABE, AEC costituiti sopra basi eguali, e fra le medesime parallele; e per conseguente il triangolo ABC sarà doppio del triangolo AEC: Ma il parallelogrammo FECG anche è doppio
* *pr. ant.* del triangolo *AEC* * dunque sarà il paralle-
* *ass.* 1. logrammo FECG eguale al triangolo ABC * Sicchè, essendo dalla costruzione l'angolo CEF eguale all'angolo dato *D*, si è soddisfatto ad ambedue le condizioni del Problema: ciocchè dovea farsi.

Preparazione alla proposizione seguente.

* *Vegga-* *Se nella diagonale* * *AC del parallelogrammo*
si la fi- *ABCD si prenda un punto E ad arbitrio, e si*
gura 43. *fanno per esso passare le linee HI, FG parallele rispettivamente a' lati AD, AB del parallelogrammo ABCD si vedranno nascere quattro parallelogrammi AGEF, EFCI, HBGE, ed FEID. I due primi, perchè sono situati intorno alla diagonale, o sia diametro AC si chiamano* parallelogrammi intorno al diametro. *Gli altri due si chiamano* supplementi, ovvero compimenti de' parallelogrammi, i quali sono intorno al diametro.

PROP. XLIII. TEOREMA.

In ogni parallelogrammo compartito in quattro parallelogrammi per mezzo del diametro, e delle due suddette parallele, i supplementi de' paralle-

lo,

logrammi , i quali sono intorno al diametro sono eguali fra di loro.

I.

Sia il parallelogrammo ABCD compartito in quattro altri parallelogrammi per mezzo del diametro AC , e delle due linee parallele HI , FG . Io dico , che il supplemento HBEG sia eguale al supplemento FEDI . FIG. 43.

II

Imperciocchè il triangolo AHE è eguale ** al triangolo AFE . siccome ancora il triangolo FGC è eguale al triangolo EIC : quindi la somma de' due triangoli AHE ; EGC , sarà ** eguale alla somma de' due triangoli AFE , EIC . Ma tutto il triangolo ABC è eguale ** al triangolo ADC ; dunque il parallelogrammo , che avanza HBGE sarà eguale * al parallelogrammo , che avanza FEID . Ciocchè dovea dimostrarsi. ** *pr.* 34. ** *ass.* 2. ** *pr.* 4. * *ass.* 3.

PROP. XLIV. TEOREMA.

Costituire sopra una retta data un parallelogrammo , il quale sia eguale ad un triangolo dato , ed abbia un' angolo eguale ad un angolo dato.

I.

Sia dato il triangolo E , la linea retta AB , e l'angolo D , fa d' uopo costituire , sopra una linea retta eguale alla data AB , un parallelogrammo eguale al triangolo C , che tenga un angolo eguale all' angolo dato D . FIG. 44.

II.

*Si costituisca * il parallelogrammo , GHEF eguale al triangolo C , che tenga l' angolo GHE eguale all' angolo dato D .* * *pr.* 42.

Si distenda la GH *sino al punto* I , *in modo che la parte HI sia eguale alla data AB .* * * *pr.* 3.

Per lo punto I *si tiri la linea LIK parallela*

* *pr.* 31. *ad HE* *, *la quale vadasi ad unire colla* FE ; *portata innanzi nel punto H .*

Si unisca la HK , la quale si distenda fintantochè vadasi ad unire colla GF , *portata innanzi nel punto M .*

pr. 31. *Per lo punto M si tiri la* * *MNL parallela a* GI , *ovvero ad* FH , *la quale s' incontri colle due HE , IK distese oltre , quanto bisogna ne' punti N , ed L* : Io dico , che il parallelogrammo *NLHI sia quello che si domanda .*

III.

Imperciocchè, parimente la linea retta GI, sopra la quale è costituito il parellelogrammo , dalla costruzione è eguale alla data AB. In secondo luogo il parallelogrammo NLHI è eguale al parallelogrammo GHEF ; quindi essendo il parallelogrammo GHEF eguale, dalla costruzione al triangolo C , sarà parimente il parallelogrammo NLIH eguale al triangolo C . Finalmente l'angolo NHI è

* *pr.* 15. eguale * all' angolo GHE : ma l' angolo GHE dalla costruzione è eguale all' angolo *D* ; dunque sarà ancora l'angolo NHI eguale all' angolo dato *D* , ciocchè dovea farsi .

PROP. XLV. PROBLEMA.

Costituire un parallelogrammo , il quale sia eguale ad una figura rettilinea data ; e tenga un angolo eguale ad un angolo dato .

I.

FIG. 45. Sia data la figura rettilinea ABCD , e l' angolo rettilineo *E* ; fa duopo costituire un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data , e che tenga un angolo eguale all' angolo dato E .

II.

Risolvasi la figura rettilinea data in tanti trian-

triangoli, in quanti è capace di potere essere risoluta, come quì ne due triangoli ABD, BDC.

Si costituisca il parallelogrammo * GFHI* *eguale al triangolo ABD, il quale tenga l' angolo* GFI *eguale all' angolo dato E.* * *pr.* 42.

Si costituisca * *sopra la linea retta* HI *il parallelogrammo* HIKL *eguale all' altro triangolo BDC, e che tenga l' angolo* HIK *eguale all' istesso angolo dato* F. Io dico, che la figura GFKL sia il parallelogrammo in quistione. * *pr. ant.*

III.

Perchè, così l' angolo GFI, come l' angolo HIK sono eguali al medesimo angolo E, saranno essi eguali fra di loro; quindi aggiuntovi il medesimo angolo FIH, saranno i due angoli GFI, FIH eguali a due angoli FIH, HIK; ma i due primi angoli, come interiori della medesima parte delle due linee parallele FH, HI sono * eguali a' due retti: dunque anche gli angoli FIH, HIK sono eguali a due retti; e perciò le due linee FI, IK giacciono * a dirittura. Quindi, siccome FI * *pr.* 29. parallela a GH; così sarà tutta la FK parallela alla medesima GH; di modo che gli angoli alterni GHI, HIK riusciranno * eguali. * *pr.* 14. * *pr.* 29. Aggiuntovi il medesimo angolo IHL; saranno i due angoli GHI, HIK eguali a' due angoli HIK. IHL: ma questi due angoli, come interiori dalla medesima parte delle due parallele HL, IK sono eguali * a due retti; * *pr.* 22. dunque ancora gli angoli GHI, IHL sono eguali a due retti; di modo che le due linee GH, HL è necessario, che giacciano a dirittura * Quindi, siccome la GH è parallela ad * *pr.* 14. FK, così sarà tutta la GL parallela ad FK; ma ancora la GF è parallela * ad LK; perchè * *pr.* 30. ciascuna di esse è parallela alla medesima HI;

dunque la figura GFKL è un parallelogrammo, il quale come costa dalla costruzione, è eguale alla figura rettilinea data ABCD, e tiene l'angolo GFK eguale all'angolo rettilineo dato E. Ciocchè dovea farsi.

PROP. XLVI. PROBLEMA.

Costituire un quadrato sopra una linea retta data.

I.

FIG. 46 Sia data la linea retta AB, fa duopo sopra di essa costituire un quadrato.

II.

* *pr.* 11. *S'innalzi* * *dal punto A la linea retta AC perpendicolare alla data AB.*

* *pr.* 3. *Si tagli* * *AD eguale ad AB.*

* *pr.* 31. *Per gli punti B, e D si tirino* * *le due linee BE DE parallele rispettivamente alle due AD, AB.* Io dico, che la figura parallelogramma ABDE sia un quadrato.

Imperciocchè, essendo dalla costruzione AD eguale ad AB, e di più essendo per cagione * *pr.* 34. del parallelogrammo ABDE * AD eguale a BE, ed AB eguale a DE, saranno tutti quattro i lati AB, BE, ED, DA eguali fra di loro. Inoltre essendo i due angoli DAB, ABE interiori delle due linee parallele AD, BE * *pr.* 29 eguali * a due angoli retti siccome dalla costruzione l'angolo DAB è retto: così parimente sarà retto l'angolo ABE: quindi gli altri due angoli BED, EDA, i quali sono ri- * *pr.* 34 spettivamente eguali * agli angoli DAB, ABE saranno parimente retti: di modo che il parallelogrammo ABED, che tiene tutt'i lati eguali, e tutti gli angoli retti sarà quadrato. Ciocchè dovea farsi.

Corollario.

Quindi ne segue, che ogni parallelogrammo, il quale tiene un angolo retto dee avere tutti gli altri

tre

tre angoli retti; che se due linee rette sono eguali, i quadrati costituiti sopra queste linee rette sono ancora eguali: che se due quadrati sono eguali, i lati de' quadrati siano parimente eguali. Il primo Corollario è chiaro dalla dimostrazione di questa proposizione. Gli altri due dalla costruzione della medesima.

PROP. XLVII. TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli il quadrato costituito sopra il lato, che sta dirimpetto all' angolo retto (il qual lato viene chiamato da' Greci Ipotenusa*) è eguale a' due quadrati costituiti sopra i due lati, i quali comprendono l' angolo retto.*

I.

Sia il triangolo *ABC*, in cui l' angolo *ABC* sia retto; io dico, che il quadrato costituito sopra l' Ipotenusa *AC* sia eguale a' quadrati costituiti sopra i due lati *AB*. *BC*, i quali comprendono l' angolo retto *ABC*. *FIG.* 47

II.

Si costituiscano * *sopra la ipotenusa AC, e sopra i due lati AB, BC i quadrati AEDC, ABFG, BCIH.* * *pr. ant.*

Per lo punto B si tiri * *la linea retta BL parallela ad AE, ovvero CD.* * *pr. 31.*

Si uniscano * *le linee rette BE, BD, GC, AI.* * *dim. 1.*

Siccome dalla costruzione, l' angolo *ABF* è retto, e dalla supposizione l' angolo *ABC* è parimente retto; così i due angoli *ABF*, *ABC* saranno eguali a due retti; quindi se due linee rette *BF*, *BC* giaceranno * a* * *pr. 14.* dirittura, di modo che siccome la *FB* è parallela alla *GA*; così sarà tutta la *FG* parallela alla *GA*. Similmente, siccome dalla costruzione l' angolo *CBH* è retto, e dalla supposizione è retto parimente l' angolo *ABC*;

così saranno i due angoli ABC, CBH eguali a due retti; e quindi le linee AB, BH
* *pr.* 14. comporranno una sola linea retta *, la quale sarà parallela alla CI.

Inoltre, siccome GA è eguale ad AB, perchè sono lati del quadrato ABFG, ed AG è eguale ad AE, perchè sono parimente lati del quadrato AEDC; così saranno i due lati GA, AC del triangolo GAC eguali a' due lati AB, AE del triangolo BAE: laonde, essendo l'angolo GAC eguale all'angolo BAE (imperciocchè questi due angoli nascono dall'aggiugnere il medesimo angolo BAC a' due angoli retti BAG,
* *pr.* 4. CAE) sarà parimente * il triangolo GAC eguale al triangolo BAE; quindi, siccome il quadrato, o sia parallelogrammo ABFG è dop-
* *pr.* 41. pio * del triangolo CGA, e similmente il parallelogrammo AELK è doppio * del triangolo BAE, perchè sono costituiti nell'stessa base,
* *pr.* 41. e fra le medesime parallele: così sarà * il quadrato ABFG eguale al parallelogrammo AELK. Nell'istessa maniera, siccome CI è eguale a CB, e CA è eguale a CD, perchè sono lati de' quadrati BCIH, ACDE; così saranno i due lati IC, CA del triangolo ICA eguali a' due lati BC, CD del triangolo BCD; quindi, essendo l'angolo ICA eguale all'angolo
* *pr.* 4. ACD sarà: * il triangolo ICA eguale al trian. golo BCD: ma il quadrato, ovvero parallelo-
* *pr.* 41. grammo CIHB è doppio * del triangolo ICA' e similmente il parallelogrammo CDKL è doppio del triangolo BCD: dunque sarà il quadrato CIHB eguale al parallelogrammo
* *ass.* 6. CDLK *. Sicchè, essendosi gia dimostrato, che il quadrato GABF sia eguale al parallelogrammo AELK; saranno tutti due i quadrati insieme eguali al quadrato AEDC; ciocche dovea dimostrarsi.

Ad

Addizione.

La scoperta di questo Teorema si dee a Pitagora *da chi ha preso il nome di* Teorema Pittagorico. *Dicesi che* Pitagora *tanto si fosse compiaciuto di questa invenzione, che avesse fatto un sacrificio di cento bovi agli Dei. Si può la verità del medesimo comprovare per mezzo de' numeri, purchè però si sappiano prima le due seguenti cose: I. Il quadrato di un numero è il prodotto, che nasce dal moltiplicare il numero in se medesimo; così 1. è il quadrato di 1: 4. è il quadrato di 2: 9. è il quadrato di 3. etc. siccome si vede nella lista seguente.*

Numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
Quadrati 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

II. Si forma il triangolo rettangolo in numeri nella maniera seguente. Prendansi due numeri ad arbitrio, come 3, e 4, i quali noi chiameremo generatori, e stabiliscasi per ipotenusa la somma de' quadrati de' detti numeri generatori 3. 4, la qual somma è 25; stabiliscasi per uno de' lati la differenza de' detti quadrati, la quale è 7; e finalmente si stabilisca per l'altro lato il doppio del prodotto, che nasce dallla moltiplicazione de' generatori 3, e 4, il qual doppio è 25; Quindi il triangolo rettangolo avrà 7 per un lato, 24 per l'altro lato, e 25 per ipotenusa. Ora il quadrato di 25 è 625, e i qgadrati 7, e 25 sono rispettivamente 49, e 567, la sommma de' quali è 625.

Se i generatori sono 1, e 2 si vedrà nascere il famoso rettangolo 3, 4, e 5, nel quale 25 il quale è il quadrato dell' ipotenusa 5 è eguale a 9, e 16 uniti insieme, che sono i quadrati de' lati 3, e 4.

PROP. XLVIII. TEOREMA.

Se il quadrato costituito sopra un lato di un triangolo sia eguale a' quadrati costituiti sopra gli altri

altri due lati, l' angolo contenuto da questi due lati sarà retto.

I.

FIG. 48. Nel triangolo ABC sia il quadrato costituito sopra il lato AC eguale a' due quadrati costituito sopra i due lati AB, BC; io dico, che l' angolo ABC contenuto sotto i due suddetti lati sia retto.

II.

* *pr.* 11. *S' innalzi* * *dal punto B la retta BD perpendicolare sopra la BC.*

* *pr.* 3. *Si tagli la BD* * *eguale alla AB.*

* *dim.* 1. *Si unisca* * *la DC.*

III.

Siccome la AB è eguale dalla costruzione alla * *Corol.* 2. *della* pr. 46. BD, così sarà * il quadrato costituito sopra la AB eguale al quadrato costituito sopra la BD aggiugnendo dunque comunemente l'istesso quadrato costituito sopra la BC; saranno i due quadrati costituiti sopra i lati AB, BC eguali a' due quadrati costituiti sopra i lati DB, BC, sicchè, essendo dalla supposizione il quadrato costituito sopra la AC eguale a' quadrati costituiti sopra i due lati AB, BC; ed essendo similmente per ragione nell' angolo retto CBD il quadrato costituito sopra l' ipotenusa CD eguale * a' due quadrati costituiti sopra i lati DB, BC: sarà il quadrato costituito sopra il lato AC eguale al quadrato costituito sopra il lato CD; laonde la retta AC sarà * eguale alla retta CD. Quindi i due angoli ABC, DBC avendo i due lati AB, BC eguale a' due lati DB, BC, ciascuno a ciascuno, e la base AC eguale alla base CD: sarà l' angolo * ABC eguale all' angolo DBC: ma l' angolo DBC è retto dalla costruzione: dunque l' angolo ABC sarà parimente retto: ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr. ant.*

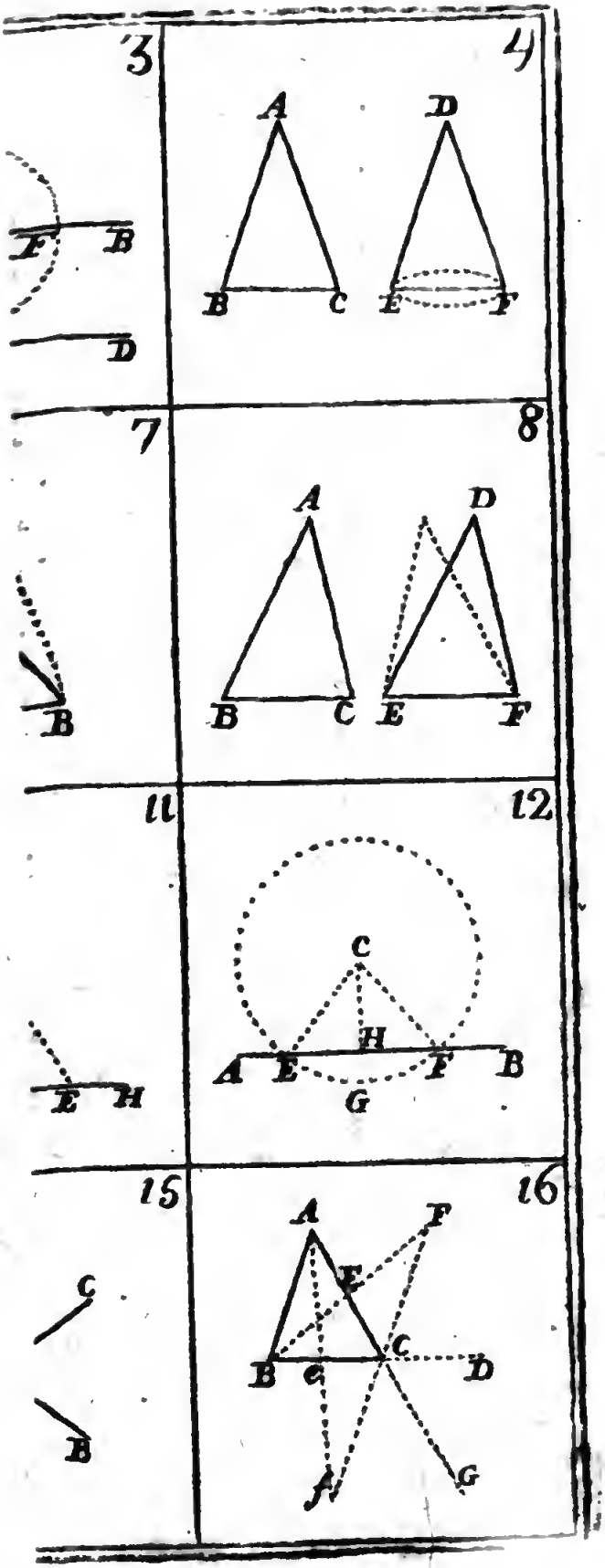
* *Corol.* 3. *della* pr. 46.

* *pr.* 8.

Questa proposizione è conversa dall' antecedente.

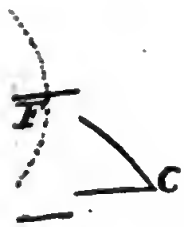
LI.

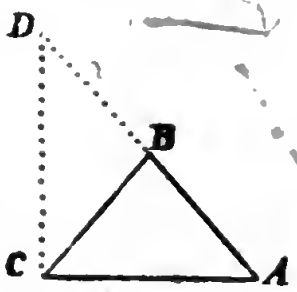
E
A
C
D
F
C
G
E


3
4
A
D
B
C
E
F
D
7
8
A
D
B
C
E
F
B
11
12
C
H
A
E
F
B
G
E
H
15
16
A
F
E
C
B
D
G
C
B

G
I
A
G
B
H
C
9
A
G
C
E

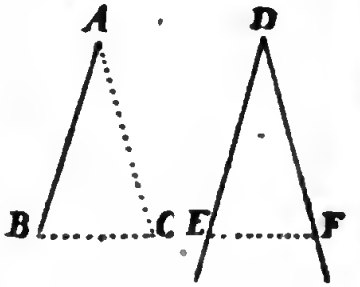
19





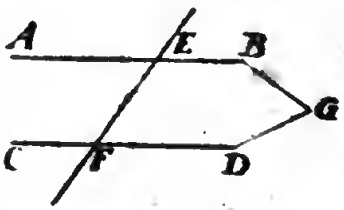
C

23

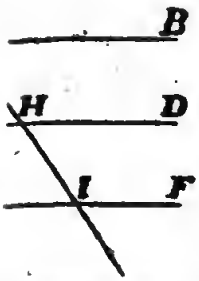


26

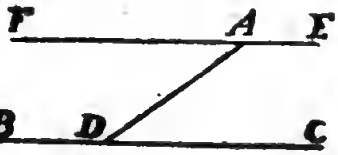
27



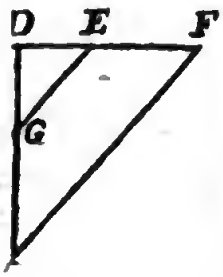
30

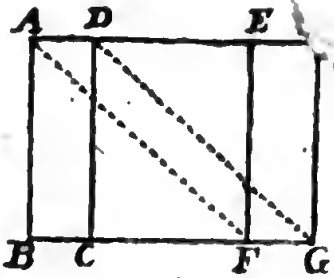


31

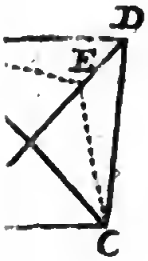


33

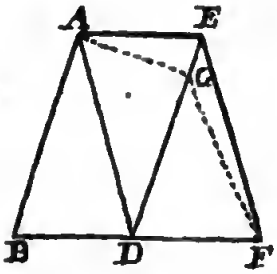




39

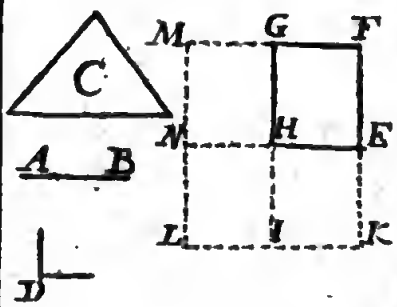


40

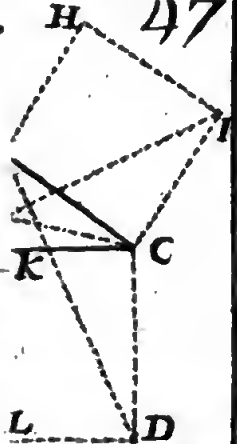


43

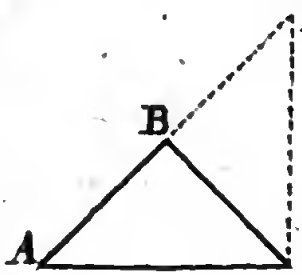
44



47



48



LIBRO SECONDO

Definizioni.

I.

Ogni parallelogrammo rettangolo si dee intendere formato da due lati, i quali comprendono l' angolo dato: de' quali lati uno dicesi lunghezza, e l' altro dicesi larghezza.

SPIEGAZIONE.

Se due parallelogrammi rettangoli sono dell' istessa lunghezza, ma uno sia più largo dell' altro non è da mettersi in dubbio, che il più largo contenga maggior superficie del meno largo; di modo che per sapere le grandezze rispettive di due parallelogrammi egualmente lunghi, fa d' uopo aver riguardo alle loro larghezze. Viceversa, se due parallelogrammi rettangoli sono egualmente larghi, ma uno sia più lungo dell' altro, il più lungo conterrà più superficie del più corto, e tanto maggior superficie conterrà, quanto egli è più lungo: di modo che per sapere le grandezze rispettive di due parallelogrammi rettangoli egualmente larghi, fa d' uopo aver riguardo alle loro larghezze. Quindi, essendo disuguali così le lunghezze, come le larghezze di due parallelogrammi rettangoli, le loro grandezze rispettive dipenderanno congiuntamente, e dalle lunghezze, e dalle larghezze, di modo che incomincia a capirsi ciocchè ha voluto intendere Euclide *con questa definizione*. Ogni parallelogrammo rettangolo si dee intendere formato da due lati, i quali comprendono l' angolo retto; *Ma perchè meglio s' intenda il senso di questa definizione,*

dal-

dalla quale dipende l' intelligenza di tutto il libro II. fingiamo, che io dovessi far capire ad altrui la vera grandezza di un parallelogrammo rettangolo, per esempio del piano di un galleria. Se io gli dico; il piano della galleria di cui vi ragiono è lungo 30. palmi senza aggiugnere altro: ciò non basta, perchè egli ne arrivi ad immaginare la vera grandezza del piano della galleria. L' istesso sarebbe, se io gli dicessi la larghezza solamente del suddetto piano, e gli tacessi la lunghezza: ma dicendogli, che il piano della galleria ha 30. palmi di lunghezza, e 20 di larghezza allora egli ne potrà formare giustissima idea, e potrà descriverlo ancora sopra una carta, non essendogli ignoti gli elementi, da' quali dipende la misura del piano: imperciocchè non avrà da fare altro, che tirare sopra la carta due linee, le quali comprendono un angolo retto, l' una delle quali sia di 30. palmi, e l' altra di 20. e far passare per gli termini di coteste linee due parallele, mentre il parallegrammo rettangolo, che quindi risulta rappresenta il piano della galleria.

Quando dunque noi diremo per innanzi che un parallelogrammo rettangolo, ovvero semplicemente un rettangolo *sia formato di tali due linee; non vorremo dire altro, se non una di queste due linee ne rappresenti la lunghezza, e l' altra la larghezza: ma trattandosi de' quadrati, non è necessario il dire che essi siano formati da due linee, ma basterà, chè si nomini una linea sola: perchè ne' quadrati la lunghezza è eguale alla larghezza: onde, chi ne sa la lunghezza egli nell' istesso tempo non può ignorarne la larghezza. Di fatto* * pr. 46. *Euclide ha insegnato nel primo libro * il modo di descrivere un quadrato sopra una linea data. Sicchè, trattandosi de' quadrati noi diremo, che essi siano formati da una linea sola, la quale fa*

le

le veci così di lunghezza, come di larghezza.

Si vuol quì avvertire, che le lunghezze si misurano per via di palmi lineari, e le superficie per via di palmi quadrati, quindi dicendosi che una torre sia alta 100. palmi, si vuol ciò intendere di palmi lineari: ma dicendosi che il piano di una stanza sia di 900. palmi, si vorrà questo intendere di palmi quadrati; vale a dire, che il piano della suddetta stanza possa rimanere compartito in 900. palmi quadrati.

Se un triangolo sia lungo 6. palmi, e largo 3., risolvendo così la lunghezza, come la larghezza del rettangolo ne' suoi palmi componenti, e tirando tante linee parallele, egli è chiaro, che il rettangolo viene a contenere 18. palmi quadrati; quindi si avrà il numero di palmi quadrati contenuti nel suddetto rettangolo, col moltiplicare il numero de' palmi lineari contenuti nella sua lunghezza per lo numero di palmi contenuti nella sua larghezza, vale a dire moltiplicando il 6. per lo 3. Similmente, se un rettangolo sia lungo 10. palmi, e largo 8., egli conterrà 80. palmi quadrati, perchè moltiplicando il 10. per 8. ne nasce il numero 80. Quindi, siccome nel quadrato la lunghezza è eguale alla larghezza, così per aver i palmi quadrati della sua superficie, basterà moltiplicare in se medesimo il numero de' palmi lineari, che si comprendano nella sua lunghezza: come se un quadrato sia 6. palmi lungo, egli comprenderà 36. palmi quadrati, e se sia lungo 8. palmi, egli comprenderà 64. palmi quadrati.

A C B

Se la linea AB è divisa nel punto C., il rettangolo, che ha la AB per lunghezza, e la BC per larghezza si suol segnare o AB, BC, ovvero ABC. Similmente il rettangolo, che ha AB per lunghezza, ed AC per larghezza si segna, o AB AC, ovvero

più

più elegantemente BAC ; ma dovendosi segnare il quadrato di AB , si farà così AB 2 : e parimente AC 2 disegnerà il quadrato formato sopra lo AC ;

Se a due supplementi di un parallelogrammo si aggiunge uno di quei, che sono intorno il diametro; la figura, che quindi risulta dicesi gnomone .

Corollario .

Quindi aggiugnendo al gnomone l' altro parallelogrammo , che sta intorno il diametro , si viene a comporre l' intero parallelogrammo : Viceversa togliendo da tutto il parallelogrammo uno di quei, che sono intorno il diametro . sopravanza il gnomone.

PROP. I. TEOREMA .

Se vi sono due linee dirittе , l' una delle quali sia divisa in molte parti , e l' altra sia indivisa. sarà il triangolo formato dalle due suddette linee eguale a tutti i rettangoli formati dalle parti della linea divisa , e dalla linea indivisa .

I.

FIG. 1. Siano le due linee rette A , BE , delle quali la seconda BE sia divisa in tre parti BC , CD , DE . Io dico, che il rettangolo formato dalle due linee A ; e BE sia eguale a tre rettangoli , il primo formato da A , e BC ; il secondo da A , e CD : ed il terzo da A , e DF .

II.

* *pr.* 11. I *S' innalzi* * *dal punto B sopra la BE la perpen.*
* *pr.* 3. I. *dicolare BF , la quale si faccia eguale* * *alla data A .*

* *pr.* 3. II *Per lo punto F si tiri* * *la FI parallela alla BE ; e per gli punti C , D , E si tirino le linee rette CG , DH , EI , parallele alla BF .*

III.

Perchè dalla costruzione le tre figure BG, GH DI sono altrettanti parallelogrammi rettangoli; saran-

saranno le tre linee rette BF, CG, EH eguali fra di loro *. Quindi essendo dalla costruzione la* *pr.* 34 BF eguale alla A, saranno ancora le altre due CG, DH eguali * ad A: il perchè il primo* *ass.* 1 rettangolo BG, il quale è formato * da' lati* *def.* 1. BF, BC, sarà ancora formato da' lati A, e *di questo* BC, e similmente il secondo rettangolo CH sarà formato da' lati A, e CD; ed il terzo rettangolo DI sarà formato da' lati A, e DE: e finalmente tutto il rettangolo BI sarà formato da' lati A, e BE: quindi essendo il ret-* *ass.* 9. tangolo BI eguale * a' tre suddetti rettangoli, sarà il rettangolo formato da A, e BE eguale a tre rettangoli formati da A, e BC; e da A, e CD; e da A, e DE. Ciocchè dovea dimostrarsi.

Le prime dieci proposizioni di questo libro, perchè si possono dimostrare per via di numeri; noi non trascureremo di farlo.

Sia A..... 10

BE..... 20	A. BE 200	A. BC 40
BC..... 4		A. CD 60
CD..... 6		A. DE ... 100
DE..... 10		.....
		200

PROP. II. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio: il quadrato formato da tutta la linea sarà eguale a due rettangoli formati da tutta la medesima linea, e dalle parti di essa.

I.

Sia la linea AB divisa ad arbitrio nel punto C: *FIG.* 2. io dico, che il quadrato formato da tutta la linea AB è eguale a due rettangoli; il primo de' quali è formato dall' istessa AB, e dalla parte AC: l'altro è formato parimente da AB, e dall' altra parte BC.

II.

II.

* pr. 46 I *Si formi* * *sopra la retta AB quadrata AD.*
* pr. 31. I *Per lo punto C si tiri* * *la retta CF parallela alle due AE, BD: in tal modo il quadrato BD rimane compartito ne' due rettangoli AF, CD.*

III.

* def. 1. di questo Perchè il rettangolo AF è formato * da' lati AE. AC: essendo dalla costruzione AE eguale ad AB: il detto rettangolo sarà parimente formato dalle due AB, AC. Similmente perchè l'altro rettangolo CD è formato * da' due lati FC, CB: essendo FC a cagione del parallelogrammo AF eguale * ad EA, ovvero ad AB: sarà il detto rettangolo CD formato dalle due AB, BC. Quindi, perchè i due rettangoli AF. CD uniti insieme compongono tutto il quadrato AD, il quale è formato da tutta la linea AB: sarà il quadrato della suddetta linea AB eguale a due rettangoli, il primo formato da AB, e da AC, l'altro formato dall'istessa AB, e da BC; ciocchè dovea dimostrarsi.

* def. 1. di questo
* pr. 34.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB	10	*AB* 2.	100
AC	3	AB. AC ...	30.
CB	7	AB. BC ...	70.
			100

PROP. III TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio: sarà il rettangolo formato da tutta la linea divisa, e da una delle sue parti eguale al quadrato della medesima parte, insieme col rettangolo formato dalle due suddette parti.

I.

FIG. 3. Sia la linea retta AB tagliata in qualunque

modo nel punto C; io dico, che il rettangolo formato da tutta la linea *AB*, dalla parte BC, sia eguale al quadrato della medesima parte BC, insieme col rettangolo formato dalle parti AC, CB.

II.

Si costituisca * *sopra la CB il quadrato CF.* *pr.46.I.
Si tiri per lo punto A la retta * *AE, parallella alle due CD, BF.* *pr.31.I.
Si distenda * *FD, sino al punto E.* * *dim.2.*

III.

Perchè il rettangolo AD è formato * da' due lati AC, CD, che comprendono l'angolo retto ACD; essendo per ragione del quadrato CF il lato DC eguale al lato *CB*; sarà il detto rettangolo AD formato da AC, e CB. In oltre essendo il rettangolo AF formato * da' due lati AB, BF, che sono intorno l'angolo retto ABF: siccome il lato BF per ragione del quadrato CF è eguale al lato BC: così sarà il detto rettangolo AF formato da AB, e BC. Quindi essendo il rettangolo AF eguale al quadrato CF il quale è formato da CB, e dal rettangolo AD: sarà il rettangolo formato da AB, e da BC eguale al quadrato formato da BC insieme col rettangolo formato dalle d e AC, CB: ciocchè dovea dimostrarsi. * *def.1.di questo.* * *def.1.di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB ..... 10 AB, BC ..... 60 CB; 36
BE .... 4 AC. CB ... 24
CB .... 6 .....
60

PROP. IV. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il quadrato formato da tutta la linea eguale a due quadrati formati dalle parti della medesima linea, insieme con altrettanti rettangoli formati dalle medesime due parti.

FIG. 4. Sia la linea retta AB segata ad arbitrio nel punto C; io dico, che il quadrato di tutta la linea AB sia eguale a' due quadrati formati dalle parti AC, e CB, insieme co' due rettangoli entrambi formati dalle medesime parti AC, e CB.

II.

*pr.46. I. *Formisi* * *sopra la AB il quadrato ABDE.*

* dim. 1. *Congiungasi* * *la diagonale EE.*

*pr.31.I. *Si tiri per lo punto C* * *la retta CGF parallela alle due AE, BD.*

*pr.31.I. *Finalmente per lo punto G si faccia passare* *, *la retta HGI parallela agli altri due lati AB. ED del quadrato AD: in tal modo o tutto il quadrato rimane compartito in due supplementi, ed in due parallelogrammi intorno il diametro.*

III.

Perchè le due linee AB, AE sono lati del quadrato AD, saranno esse eguali fra di loro: quindi il triangolo ABE sarà isoscele; e l'an-
* pr. 5. I. golo ABE dovrà essere eguale * all' angolo AFB. Ma a cagione delle due linee parallele AB, HI segate dalla terza EGB, l'angolo este-
*pr 29. I. riore HGF è eguale * all'angolo interiore opposto ABE; dunque sarà parimente il mede-
* ass. 1. simo angolo HGE eguale * all'angolo HEG: il perchè li due lati HF, HG sottoposti a que-
* pr. 6. I. sti due angoli eguali, saranno * parimente eguali: ma a cagione del parallelogrammo HF, l
*pr. 33. I. due lati HE, HG sono * rispettivamente eguali a' due lati opposti FG, FE: dunque tutt' i quattro lati EH, HG, FG, FE del parallelogrammo suddetto sono eguali; ma tutti li
* Cor. 1. quattro angoli sono retti *; perchè uno di es-
della pr. si HEF è retto: dunque il detto parallelo-
46. grammo HF sarà un quadrato, il quale è formato dal lato HG, ovvero dal lato AC, che
*pr. 34. I. è eguale ad HG *.

Si

Similmente a cagione delle due parallele CEF, AE segate dalla terza BGE, l'angolo esteriore CGB è eguale * all'angolo interiore opposto AEB: quindi essendosi dimostrato l'angolo AEB eguale all'angolo ABE, saranno gli angoli CGB, CBG eguali fra di loro, perciò i due lati CB, CG sottoposti a questi angoli * saranno eguali. Dimodocchè essendo, a cagione del parallelogrammo CI, i due lati CB, CG eguali rispettivamente a' due lati opposti * IB, IG: saranno tutti quattro i lati CG, CB, IG, IB del suddetto parallelogrammo eguali fra di loro; ma tutti quattro i suoi angoli * sono retti; perchè l'angolo CBI è retto; dunque il medesimo parallelogrammo GI, sarà un quadrato, il quale è formato da GB: quindi, siccome il rettangolo AG è formato * da due lati AC, CG, i quali sono intorno all'angolo retto ACG, così il detto rettangolo AG sarà formato parimente da' due lati AC, CB, essendo CG eguale a CB: di modo che essendo il rettangolo GD eguale * al rettangolo AG, saranno tutti due insieme eguali a due rettangoli formati entrambi da AC, e CB. Sicchè, poichè tutto il quadrato AD è eguale a' due quadrati HF, CI, ed a' due rettangoli AG, GD: sarà il quadrato formato da tutta la linea AB eguale a' due quadrati formati dalle parti di essa AC, CB insieme coi due rettangoli formati dalle medesime parti AC, CB: ciocchè dovea dimostrarsi.

*pr.29.I.

*pr.16.I.

*pr 34.I.

* pr.32.

*d.f.1. di questo.

*pr.21.I.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB	10	AB^2	100	AC^2	36
AC	6			CB	16
CA	4			2 AC. CB	48
				.....	
					100

Corollarj.

Quindi ne segue I. che i parallelogrammi i quali sono posti intorno la diagonale del quadrato, sono essi ancora quadrati: II. Che se una linea è segata in due parti eguali, il quadrato di tutta la linea sia quadrupla del quadrato della metà di essa. Imperciocchè, immaginando, che AB sia divisa in parti eguali nel punto C. tanto li due parallelogrammi HE, CI, che sono posti intorno la diagonale del quadrato, quanto li due supplementi, AG, GD sono quadrati, e tutti riescono eguali fra di loro, di modochè tutti quattro insieme, li quali ricompongono il quadrato formato dalla AB sono quadrupli di ciascuno di essi. Così in numeri il quadrato di 8, che è 64 è quadruplo di 16, che è il quadrato di 4 metà del numero 8.

PROP. V. TEOREMA.

Se una linea è divisa I. in due parti eguali. II in due parti disuguali ad arbitrio; il rettangolo formato dalle parti disuguali della linea insieme col quadrato di quella parte della medesima, che rimane interposta fra i due segamenti sarà eguale al quadrato della metà della suddetta linea.

I.

FIG. 5ª Sia la linea retta AB tagliata una volta in parti eguali nel punto C, ed un'altra volta in parti disuguali nel punto D; io dico, che il rettangolo formato dalle parti disuguali AD, DB insieme col quadrato della linea DC interposta fra i due segamenti C, e D sia eguale al quadrato formato dalla metà CB.

II.

*pr.46.I. *Si costituisca* * *sopra la BC il quadrato BCEF,*

* *dim* 1. *Si unisca la diagonale BE* *.

*pr.31.I. *Si tiri per lo punto D* * *la retta DHG parallela a' due lati BF, CE del quadrato CF.*

*pr.31.I. *Finalmente per li punti B, ed A si tirino* * *le*

linee IHM, AM parallele rispettivamente ai due lati BC, CE del quadrato, di modochè si venga a formare la figura tale, quale si vede quì delineata. II.

Siccome dalla costruzione la figura BCEF è un quadrato, così saranno i due parallelogrammi DI, LG * altrettanti quadrati. Quindi, siccome il rettangolo DM è formato * dalle due linee AD, DH, così sarà parimente formato dalle due AD, BD. Ora si consideri, che essendo il supplemento HF eguale * al supplemento CH, sarà, aggiugnendo ad entrambi l'istesso quadrato DI, il parallelogrammo DF eguale al parallelogrammo CI: ma questo parallelogrammo CI è eguale al parallelogrammo * CM. perchè sono costituiti sopra le basi eguali. BC, CA, e fra le medesime parallele IM, BA; dunque sarà ancora il parallelogrammo CM eguale al parallelogram.mo DF; aggiugnendo di nuovo ad entrambi il medesimo parallelogrammo CH: sarà il rettangolo DM, ovvero il rettangolo formato da AD, e da DB eguale al gnomone NOK. Finalmente, aggiugnendo, così al rettangolo, come al gnomone il quadrato HE, il quale è formato da HL, ovvero da DC, che eguale * ad HL: sarà il rettangolo formato * da AD, DB insieme col quadrato di DC eguale al gnomone NOK insieme col quadrato HE: vale a dire al quadrato CF, il quale è formato da BC: ciocchè dovea dimostrarsi.

Carol. 1. *della pr.* 4 *def* 1. *di questo.*

* *pr.* 43 I.

* *pr.* 36 I.

* *pr.* 34 I.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB 10

AC o CB .... 5 CB_2 .... 25 AD, DB 21

AD ... 3 DC_2 4

DC ... 2 .....

DA ... 7 25

PROP. VI. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti eguali: e le si aggiunga per diritto un' altra linea retta ad arbitrio: sarà il rettangolo formato dalla composta di tutta la linea, e dall' aggiunta, e dall' istessa aggiunta, insieme col quadrato della metà eguale al quadrato formato dalla composta dalla metà eguale al quadrato formato dalla composta della metà, e dell' aggiunta.

I.

FIG. 6. Sia la linea retta AB segata in parti eguali nel punto C; e sia ad essa aggiunta per diritto la BD; io dico, che il rettangolo formato dalla AD composta da tutta AB, e dall' aggiunta BD, e dall' istessa aggiunta DB insieme col quadrato della metà BC sia eguale al quadrato della DC composta della metà CB, e da l' aggiunta BD.

II.

pr.46.I. *Si unisca * sopra la DC il quadrato DCFE, Si unisca la diagonale DF.*

*dim.1. *Si tiri per lo punto E * la retta BHG pa-*

*pr.31.I. *rallela a' due lati DE, CF del quadrato CE.*

*pr.31.I. *Per li punti H, ed A si tirino * le rette IHM, AM parallele rispettivamente a' due lati DC, CF del quadrato CE.*

IIII

Perchè dalla costruzione, e la figura DCFE i un quadrato, saranno li due parallelogrammi

* Cor.1. della pr. 4. BI, LG costituiti intorno alla diagonale deè quadrato altrettanti quadrati: * quindi siccome il rettangolo AI è formato da' due lati AD,

*def.1. di questo. DI, così sarà parimente formato * da' due lati AD, DB: Ora si consideri, che essendo i

*pr.36.I. due parallelogrammi CH, AL eguali * fra di loro, perchè sono costituiti sopra le basi eguali BC; CA, e fra le medesime parallele BA, HM;

HM; ed essendo di più il parallelogrammo CH eguale * al parallelogrammo HE; sarà il parallelogrammo AL eguale al parallelogrammo HE: quindi aggiugnendo ad entrambi il medesimo parallelogrammo CI; sarà il rettangolo AI, vale a dire il rettangolo formato da AD, e da DB eguale al gnomone NOR; ed aggiugnendo in fine, così al rettangolo, come al gnomone il medesimo quadrato LG, il quale è formato da HE, ovvero da BC, sarà il rettangolo formato da AD, e DB insieme col quadrato di BC eguale al gnomone NOR insieme col quadrato LG: vale a dire a tutto il quadrato CE, il quale è formato da DC; ciocchè dovea dimostrarsi. * pr. 43. I.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB 10
CB ..... 5 DC2 ..... 49 AD : DB 24
BD ..... 2 GC 2 25
AD ..... 12 .....
CD 7 49

PROP. III. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il quadrato di tutta la linea insieme col quadrato di una delle sue parti eguale a' due rettangoli, formati entrambi da tutta la linea, e dall' istessa parte, insieme col quadrato dell'altra parte.

I.

Sia la linea retta AB segata ad arbitrio nel punto C; io dico, che il quadrato di tutta la AB insieme col quadrato della parte BC è eguale a' due rettangoli entrambi formati da tutta AB; e della parte BC insieme col quadrato dell' altra parte AC. *FIG 7.*

II.

*pr. 43. I. *Si costituisca* * *sopra la AB il quadrato ABDE.*

* *dim.* 1. *Si unisca* * *il diametro BE.*

*pr. 31. I. *Si tiri per lo punto C* * *la retta CGP parallela a' due lati AE, BD del quadrato ABDE.*

*pr. 31. I. *Per lo punto G si tiri* * *la retta IGH parallela agli altri due lati AB, ED del quadrato ABDE.*

III.

pr. 31. I. Siccome li due supplementi CI, HF sono eguali fra di loro, così aggiugnendo ad essi il medesimo parallelogrammo CH, sarà il rettangolo AH eguale al rettangolo CD; e tutti due insieme saranno doppj del rettangolo AH: ma tutti due insieme sono eguali al gnomone MNO, insieme col parallelogrammo CH, il

* *Cor.* 1. *della pr.* 5. quale è un quadrato * perchè sta intorno al diametro BE del quadrato AD; dunque il gnomone MNO insieme col quadrato CH sarè doppio del rettangolo AH; il perchè essendo

* *def.* 1. *di questo.* questo rettangolo AH formato * da due lati AB, BH, ovvero da' due lati loro: sarà il suddetto gnomone MNO insieme col quadrato CH eguale a due rettangoli entrambi formati da AB, e BC. Aggiungasi ad essi il medesimo quadrato IF, il quale è formato da IG ovvero da AC: sarà il gnomone MNO insieme co' due quadrati CH, IF, vale a dire saranno i due quadrati AD, GH, i quali sono formati rispettivamente da AB, e da BC eguali a due rettangoli formati da AB, e BC, insieme col quadrato di AC; ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB	10	AB^2	100	AB. CB	80
AC	6	CB^2	16	AC^{12}....	36
CB	4	.....		.....	
			116		116

PROP.

PROP. VIII. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio, sarà il quadrato formato dalla composta di tutta la retta, e di una delle sue parti, come se fosse una linea sola, eguale a quattro rettangoli formati da tutta la linea, e dalla medesima parte, insieme col quadrato dall' altra parte.

I.

Sia la retta AB divisa ad arbitrio nel punto C; la quale s' intenda distesa fin' al punto D, in modochè BD sia eguale a BC; io dico, che il quadrato formato dalla AD composta da tutta la AB, e dalla BC è eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC, insieme col quadrato dell' altra parte AC. FIG. 8.

II.

*Si costituisca * sopra la BD il quadrato ADEF.* * pr. 46. I.
*Si unisca * la diagonale FD.* * dim. 1.
*Per li punti B, e C si tirino * le parallele* * pr. 31. I.
BIG GKH alle DE, AF.
Per li punti I, e K si facciano passare le parallele NIL, QKO all' altre due AD, FE.

IL

Siccome dalla costruzione la figura ADEF è un quadrato, così * li parallelogrammi CIOK, QKKF situati intorno alla di lui diagonale saranno due quadrati. Di più, siccome la figura CO è un quadrato, ed il suo lato CD dalla costruzione è tagliato in parti eguali nel punto B; così saranno le quattro parti di esso * CI, BL, MP, IO quattro quadrati tutti eguali fra di loro, e tutto il quadrato CO sarà quadruplo del quadrato CI. Ora essendo CB eguale a BD, sarà ancora KP *, a cagione de' due parallelogrammi CP, BO eguali, a PO; quindi li due parallelogrammi PH, OG costituiti sopra le basi KP, PO eguali, e

* Cor. 1. della pr. 4.
* Cor. 2. della pr. 4.
* pr. 34. I.

fra

* *pr.* 36. fra le medesime parallele HE, KO saranno * eguali fra di loro. Di più essendo eguali li
* *Cor.* 3. *della pr.* 46. *I.* due quadrati CI, MP; sarà il lato CM * eguale al la o MK; e perciò li due parallelogrammi CN, MQ costituiti sopra le basi eguali CM, MK; e fra le medesime parallele AQ, CK saranno eguali *: quindi, essendo eguali
* *pr.* 36. *I.* li due parallelogrammi PH, MQ perchè *
* *pr.* 43. *I.* sono supplementi del parallelogrammo NIGF: saranno tutti quattro OG, PH, MQ; CN eguali fra di loro; e tutti insieme saranno quadrupli del parallelogrammo CMNA; ma si è dimostrato, che il quadrato CO sia quadruplo del quadrato CI; dunque li quattro suddetti parallelogrammi insieme col quadrato CO, vale a dire il gnomone TIR sarà quadruplo del rettangolo BN, quale rettangolo
* *def.* 1. *di questo* essendo formato * da AB, e BI, ovvero da AB, e EC, e ne segue, che il gnomone TIR sia eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC: aggiugnendo dunque ad entrambi il medesimo quadrato CH, il quale è formato da QK, ovvero da AC; * sarà il gnomone TIR insieme col quadrato QH, ovvero tutto il quadrato AE, il quale è formato da AD, vale a dire dalla composta di AE, e BC eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC insieme col quadrato di AC; ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB....8 *AD* 2 100 ..... 2 *AB*, *BC* ... 64
AC....6 *AC* 2... 36
CD, o *DB*....2 .....
BD...10 100

PROP. IX. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in parti eguali, ed in parti diseguali; saranno i due quadrati formati dal.

dalle parti disuguali doppj de' due quadrati formati l' uno dalla metà, e altro da quella parte della linea, che rimane interposta fra i due segamenti.

I.

Sia la linea retta AB, segata in due parti eguali nel punto C, ed in due parti disuguali nel punto D; io dico, che li due quadrati formati dalle parti disuguali AD; DB sono doppj di due quadrati, l' uno formato dalla metà AC, l'altro dalla parte CD, che rimane interposta fra due segamenti. FIG. 9.

II.

*S' innalzi * dal punto C sopra la AB la perpendicolare DE, e facciasi * eguale ad AC, e per conseguente a CB.* *pr.11.I *pr.3.I.

*Si uniscano * le due EA, FB.* * dim. 1.

*Dal punto D s' innalzi * la perpendicolare DF sopra la medesima AB.* * pr.11.I.

*Dal punto F si faccia cadere * sopra la EC la perpendicolare FA.* pr. 11. I.

Si unisca la FA.

III.

Siccome dalla costruzione la EC è eguale, così alla AC, come alla CB, saranno perciò isosceli li due triangoli CEA, CEB, e gli angoli sopra le basi AE, EB saranno * eguali fra di loro; quindi avendo ogni triangolo i suoi tre angoli eguali * a due retti, e di più essendo dalla costruzione ciascuno de' due suddetti triangoli rettangoli, saranno li quattro angoli CAE, CEA, CBE, CEB eguali alla metà di un retto: laonde tutto l'angolo AEB sarà retto, ed il triangolo AEF sarà rettangolo in E. Inoltre nel triangolo EGF essendosi dimostrato l'angolo GEF eguale alla metà di un retto, e l'angolo EGF essendo dalla costruzione retto, sarà l'angolo rimanente * GFE * pr.5.I. * pr.32.I. * pr.32.I.

egua-

eguale parimente alla metà d' un retto, e perciò, siccome gli angoli GFE ; GEF sono
* *pr.*6.I. eguali fra di loro, come saranno * parimente eguali i due lati GE, GF. Similmente nel triangolo FDB, essendo stato l'angolo DBF mostrato eguale alla metà d' un retto, l' angolo FDB dalla costruzione essendo retto,
* *pr.*32 I. sarà il rimanente angolo DFB eguale * alla metà d' un retto; quindi l' egualità degli an-
* *pr.*6.I. goli DBF, DFB richiede, che i lati * DF, DB siano eguali fra di loro : di modochè fin' ad ora rimangono dimostrate tre cose.

I. Che il triangolo AEF sia rettangolo nel punto E : II. Che EG sia eguale a GF : III. Che DF sia eguale a DB.

* *Cor.* 2. *della pr.* 46. * *pr.* 47. Tali cose così premesse; poichè dalla costruzione CE è eguale a CA : * sarà il quadrato di CE eguale al quadrato di CA, e tutti due insieme, li quali, a cagione dell'angolo retto in C sono eguali * al quadrato dell'ipotenusa AE; saranno doppi del quadrato di AC. Similmente, poichè EG è eguale a GF, sarà il quadrato di EG eguale al quadrato di
*pr.*47 I. GF, e tutti due insieme, li quali sono eguali * al solo quadrato di EF, saranno doppj del quadrato di GF, ovvero del quadrato di CD; quindi i due quadrati di AE, e di EF insieme saranno doppj de' due quadrati di AC, e di CD; ma per ragione dell' angolo retto
* *pr.*47.I. AEF, il quadrato dell' ipotenusa AF * è eguale a' quadrati di AE, e di EF : dunque sarà parimente il quadrato di AF doppio de' quadrati di AC, e di CD il perchè essendo, a cagione dell' angolo retto : ADE, il quadrato
* *pr.*47.I. dell' ipotenusa AF eguale * a' due quadrati di AD, e di DF, ovvero di AD, e DB : perchè DB è eguale a DF ; saranno i quadrati di

AD

AD, e di BD doppj de' quadrati di AC e di CD; ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB. ...0		
AC.. ..5	AD2...49	AC2...25
CD.--2	DB...6	CD.....4
AD...7	.....	.....
DB.... 3	58	29
		29
		.....
		58

PROP. X. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti eguali, e le sia aggiunta per diritto un' altra linea retta ad arbitrio; il quadrato formato dalla composta di tutta la linea, e dell' aggiunta, insieme col quadrato dell' aggiunta saranno doppj de' quadrati formati dalla metà, e dalla composta della metà, e dell' aggiunta.

I.

Sia la retta AB segata in parti eguali nel punto G, e sia ad essa aggiunta per diritto la BD, io dico, che il quadrato formato da AD composta da tutta la AB, e dall' aggiunta BD insieme col quadrato dell' aggiunta DB sono doppj del quadrato della metà AC, e del quadrato di CD, composto dalla metà CB, e dall' aggiunta BD. *FIG.* 10.

II.

S' innalzi * *la perpendicolare CE sopra la AB, e si faccia eguale* * *a CA, e per conseguente a CB.* * *pr.* 11. I. * *pr.* 3. I.

Si uniscano * *le due EA, EB.* * *dim.* 1.

Dal punto D s' innalzi * *sopra AD la perpendicolare DG, la quale distesa vadasi ad unire nel punto F colla EB distesa parimente verso F.* ** *pr* 11. I.

Dal

* *Dal punto E si faccia cadere sopra la GF la*
*pr.13.I. *perpendicolare* * *EG.*
*dim.1. *Si unisca la AF* *.

III.

Siccome dalla costruzione la EC è eguale; così alla AG, come alla BC, così i due triangoli CAE, CBE saranno isosceli, e gli angoli sopra le basi AE, EB saranno * eguali. Quindi avendo ogni triangolo i suoi tre angoli eguali a due retti *, e di più essendo per costruzione ciascuno de' due suddetti triangoli rettangolo, saranno i quattro angoli CAE, CEA, CEB' CBE eguali alla metà d' un angolo retto; laonde tutto l' angolo AEC sarà retto, ed il triangolo AEF sara rettangolo in E Inoltre nel triangolo BDF essendo per costruzione retto l' angolo BDF, e mezzo retto l' angolo DBF, per essere eguale * all'angolo CBE opposto al vertice, sarà l' angolo rimanente * EFB eguale alla metà d' un retto; quindi l' eguaglianza degli angoli DBF, DFB richiede, che li due lati * DB, DF siano eguali. Similmente nel triangolo EGF essendo stato dimostrato, che l' angolo GFE sia eguale alla metà d' un retto, essendo per costruzione l' angolo FGE retto, sarà il rimanente angolo GEF eguale alla metà d' un retto; quindi l' egualità degli angoli GFE, GEF richiede, che li due lati GF, GE siano * eguali fra di loro.

*pr.5.I.
*pr.32.I.
*pr.15.I.
*pr.32.I.
*pr.6.I.
*pr.6.I.

Tali cose così premesse; poichè della costruzione CE è eguale a CA, sarà il quadrato di CE eguale al quadrato di CA, e tutti due insieme saranno doppj del quadrato CA; ma tutti due insieme sono eguali * al quadrato dell' ipotenusa AE; dunque il quadrato di AC è e perchè nell' istessa maniera si farà ve-

*pr.47.I.

de-

dere, che il quadrato di EF sia doppio del quadrato di EG, vale a dire del quadrato di CD * ne segue, che li due quadrati di AE, * pr. 44. I. e di EF insieme sono doppj de' due quadrati di AC e di CD insieme; ma a cagione dell' angolo retto in E il quadrato dell' ipotenusa ** pr 37. I. AF è eguale a' due quadrati di AE, e di EF; dunque sarà parimente il quadrato di AF doppio de' quadrati di *AC*, e di CD Quindi essendo a cagione dell' angolo retto ADF il quadrato di AF eguali a' quadrati * di AD, * pr. 47. I. e DF, ovvero di AD, e *DB*: perchè è stata dimostrata DB eguale a DF saranno i quadrati di AD, e di *DB* doppj de' quadrati di AC, e di CD: ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AC, o CD.... 4	AD2 100	AC2	61
ED.... 2	DB2.... 4	CD2	36
AD.... 0	....	.....	
CD.. .6	104		52
			52
			.....
			104

Le proposizioni, che seguono non si possono dimostrare per la strada de' numeri.

PROP. XI. TEOREMA.

Dividere una linea retta data; in modochè il rettangolo formato da tutta la linea, e della parte minore di essa, sia eguale al quadrato della parte maggiore.

I.

Sia data la linea retta AB: fa duopo dividerla con tal legge nel punto H, che il rettangolo formato da tutta *AB*, e della parte minore BH sia eguale al quadrato dell' altra parte AH. *FIG.* 11.

De-

*pr. 46. I. *Descrivasi* * *sopra la AB il quadrato ABCD.*
*pr. 10. I. *Si tagli* * *il lato AD in parti eguali nel punto E.*
*dim. 1. *Si unisca* * *AB.*
Si distenda EA sino ad F, in modochè EF
*pr. 3. I. *sia eguale* * *ad EB.*
*pr. 46. I. *Descrivasi* * *sopra AF il quadrato AG, e si*
*dim. 2. *distenda* * *GH sino ad I*: io dico, che il rettangolo formato da AB, BH sia eguale al quadrato di AH.

III.

Siccome dalla costruzione la retta AD è divisa in parti eguali nel punto E, ed è stata ad essa aggiunta per dritto la parte AF, così
*pr. 6. di questo. sarà il * rettangolo DFA, insieme col quadrato di AE eguale al quadrato EF, ovvero di EB, che dalla costruzione è eguale ad EF: ma a cagione dell'angolo retto EAB il quadrato dell'ipotenusa EB è eguale * a' due quadrati di AE, AB; dunque sarà parimente il rettangolo DFA, insieme col quadrato di AE eguale al quadrato di AE, ed al quadrato di AB: togliendone dunque il medesimo quadrato di AB: togliendone dunque il medesimo
*pr. 47. I.
* ass. 1. quadrato di AE, rimarrà * il rettangolo DFA eguale al quadrato di AB: ma a cagione del quadrato AG; il rettangolo DFA è eguale al rettangolo DG, ed il quadrato di AB dalla costruzione è il quadrato AC; dunque il rettangolo DG sarà eguale al quadrato AC: togliendone il medesimo rettangolo DH, il quale è
s. 3. comune: rimarrà * il quadrato AG eguale al rettangolo CH: ma il quadrato AG è formato da AH; ed il rettangolo CH è formato *
*def. 1. di questo. da BH, e BC; ovvero da BH, ed AB; dunque il quadrato formato dalla parte maggiore AH è eguale al rettangolo formato dalla minore BH, e da tutta la AB; ciocchè dovea farsi.

PROP.

PROP. XII. TEOREMA.

Ne' triangoli ottusangoli il quadrato formato dal lato, che sta dirimpetto all' angolo ottuso, tanto è maggiore de' quadrati degli altri due lati, i quali contengono l' angolo ottuso, quanto sono due rettangoli formati da uno de' due lati, che sta intorno all' angolo ottuso, e da quella porzione del medesimo (portato innanzi quanto bisogna), *che rimane interposta fra l' angolo ottuso, e la perpendicolare, che si fa cadere dall' angolo opposto.*

I.

Sia il triangolo ottusangolo *CBA*, *il di cui lato* BA, *che sta intorno all' angolo ottuso in B si porti innanzi, finchè possa sopra di esso cadere la perpendicolare CD dell' angolo opposto* C. Io dico, che il quadrato del lato CA, che sta dirimpetto all' angolo ottuso CBA, tanto è maggiore de' quadrati degli altri due lati CB, BA, che contengono l' angolo ottuso, quanto è il valore di due rettangoli formati dal lato AB, che sta intorno all' angolo ottuso, e dalla parte di esso BD, che rimane interposta fra l' angolo ottuso B, e la perpendicolare CD. FIG. 12.

II.

Perchè la retta AD è divisa nel punto B, sarà * il quadrato di AD eguale al quadrato di AB, al quadrato di BD, ed a due rettangoli formati da AB, e BD, aggiugnendo dunque ad essi il medesimo quadrato di DC; saranno i quadrati di AD, e DC eguali a' quadrati di AB, e di BD, e di DC, insieme con due rettangoli formati da AB, e BD: ma il quadrato dell'ipotenusa CA è eguale a' due quadrati di AD, e di DC; e similmente il quadrato dell' ipotenusa BC è eguale a' due

* *pr.* 4. *di questo.*

* *ass.* 2.

quadrati di BD, DC; dunque il quadrato di AC sarà eguale a' due quadrati di AB, e BC; insieme con due rettangoli di AB; BD; quindi sarà facile a conchiudere, che il quadrato di AC sia maggiore de' quadrati di AB, e BC, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da AB, BD.

PROP. XIII. TEOREMA.

Ne' triangoli acutangoli, il quadrato formato dal lato opposto all' angolo acuto, è minore de' quadrati degli altri due lati, i quali comprendono l' istesso angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da uno de' lati, i quali sono intorno all' angolo acuto, e da quella parte del medesimo lato, che rimane interposta fra l' angolo acuto, e la perpendicolare, che si fa cadere dall' angolo opposto sopra di esso.

I.

Sia il triangolo acutangolo ABC, nel qua-
FIG. 13. le dal punto C s' intenda cadere la perpendicolare CD sul lato AB, il quale sta intorno l' angolo acuto CAB; io dico, che il quadrato di CB, che sta dirimpetto all' angolo acuto, tanto è minore de' quadrati de' lati CA, AB, che comprendono l' istesso angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati dal lato BA, e dalla parte di esso AD, che rimane interposta fra l' angolo acuto A, e la perpendicolare CD.

II.

Perchè la retta AB è divisa nel punto D,
prop. di questo saranno * i due quadrati di AB, e di AD eguali a due rettangoli formati da BA, e da AD, insieme col quadrato di DB: aggiugnendo dunque ad essi il medesimo quadrato di DC: sa-
ass. 2. ranno * i tre quadrati di AB, e di AD, e

di

di DC eguali a due rettangoli di BA, e di AD, insieme co' due quadrati di DB, e DC; ma il solo quadrato dell'ipotenusa * AC è eguale a' due quadrati di AD, e di DC: siccome il solo quadrato dell'ipotenusa CB è eguale a' quadrati di DB, DC: dunque saranno i due quadrati di AB, e di AC eguali a' due rettangoli formati da BA, e da AD, insieme col quadrato di BC; dal che facilmente si deduce, che il quadrato di BC, tanto è minore de' quadrati di AB, e di AC, quanto è il valore de' due rettangoli formati da BA, ed AD: ciocchè dovea dimostrarsi. * pr. 47. I.

*Si vuol quì avvertire, che questo Teorema è vero, non solamente ne' triangoli acutangoli; ma eziandio negli ottusangoli, e ne' rettangoli, purchè si prenda il lato, che sta dirimpetto ad uno de' due angoli acuti. Così nel triangolo ottusangolo CBA * si dimostrerà nell' istessa maniera, che il quadrato del lato CB, che sta dirimpetto all' angolo acuto CAB, tanto è minore de quadrati de' due lai CA, AB, i quali contengono l'angolo acuto CAB, quanto è il valore di due rettangoli BAD. Ma, siccome quando il triangolo CBA è rettangolo in B, il punto B si confonde col punto D; e per conseguente il rettangolo formato da BA, ed AD diventa eguale al quadrato di AD, così nel triangolo rettangolo CDA sarà il quadrato del lato CD, che sta dirimpetto all' angolo acuto A, tanto minore de' quadrati degli altri due lati CA, AD, che contengono l'angolo acuto CAD, quanto è il valore di due quadrati formati da AD.* * veggasi la figura 22. di questo.

PROP. XIV. TEOREMA.

Formare un quadrato eguale ad una figura rettilinea data.

quadrati di BD, DC; dunque il quadrato di AC sarà eguale a' due quadrati di AB, e BC; insieme con due rettangoli di AB; BD; quindi sarà facile a conchiudere, che il quadrato di AC sia maggiore de' quadrati di AB, e BC, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da AB, BD.

PROP. XIII. TEOREMA.

Ne' triangoli acutangoli, il quadrato formato dal lato opposto all' angolo acuto, è minore de' quadrati degli altri due lati, i quali comprendono l' istesso angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da uno de' lati, i quali sono intorno all' angolo acuto, e da quella parte del medesimo lato, che rimane interposta fra l' angolo acuto, e la perpendicolare, che si fa cadere dall' angolo opposto sopra di esso.

I.

Sia il triangolo acutangolo ABC, nel quale dal punto C s' intenda cadere la perpendicolare CD sul lato AB, il quale sta intorno l' angolo acuto CAB; io dico, che il quadrato di CB, che sta dirimpetto all' angolo acuto, tanto è minore de' quadrati de' lati CA, AB, che comprendono l' istesso angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati dal lato BA, e dalla parte di esso AD, che rimane interposta fra l' angolo acuto A, e la perpendicolare CD.

FIG. 13.

II.

Perchè la retta AB è divisa nel punto D, saranno * i due quadrati di AB, e di AD eguali a due rettangoli formati da BA, e da AD, insieme col quadrato di DB: aggiugnendo dunque ad essi il medesimo quadrato di DC: saranno * i tre quadrati di AB, e di AD, e

* *prop. di questo*

* *ax.* 2.

di

di DC eguali a due rettangoli di BA, e di AD, insieme co' due quadrati di DB, e DC; ma il solo quadrato dell'ipotenusa AC è eguale a' due quadrati di AD, e di DC: siccome il solo quadrato dell'ipotenusa CB è eguale a' quadrati di DB, DC; dunque saranno i due quadrati di AB, e di AC eguali a' due rettangoli formati da BA, e da AD, insieme col quadrato di BC; dal che facilmente si deduce, che il quadrato di BC, tanto è minore de' quadrati di AB, e di AC, quanto è il valore de' due rettangoli formati da BA, ed AD: ciocchè dovea dimostrarsi. *Pr. 47. I.

*Si vuol quì avvertire, che questo Teorema è vero, non solamente ne' triangoli acutangoli; ma eziandio negli ottusangoli, e ne' rettangoli, purchè si prenda il lato, che sta dirimpetto ad uno de' due angoli acuti. Così nel triangolo ottusangolo CBA * si dimostrerà nell' istessa maniera, che il quadrato del lato CB, che sta dirimpetto all' angolo acuto CAB, tanto è minore de quadrati de' due lai CA, AB, i quali contengono l'angolo acuto CAB, quanto è il valore di due rettangoli BAD. Ma, siccome quando il triangolo CBA è rettangolo in B, il punto B si confonde col punto D; e per conseguente il rettangolo formato da BA, ed AD diventa eguale al quadrato di AD, così nel triangolo rettangolo CDA sarà il quadrato del lato CD, che sta dirimpetto all' angolo acuto A, tanto minore de' quadrati degli altri due lati CA, AD, che contengono l'angolo acuto CAD, quanto è il valore di due quadrati formati da AD.* *veggasi la figura 22. di questo.

PROP. XIV. TEOREMA.

Formare un quadrato eguale ad una figura rettilinea data.

I.

FIF. 14. Sia data la figura rettilinea A; fa duopo formare un quadrato, il quale sia eguale alla medesima figura rettilinea.

II.

*pr 45. I. *Si deririve* * *il parallelogrammo BCD eguale alla figura rettilinea data, che abbia l'angolo BCD retto. Ciò fatto, se mai sia, che i due lati BC, CD, i quali sono intorno l'angolo retto siano eguali, il parallelogrammo rettangolo già descritto sarà un quadrato, e perciò si sarà soddisfatto al Problema.*

Ma, se il lato BC, è maggiore del lato CD.

* pr. 3. I. *Distendasi il lato BC sino al punto E, in mo-*
* pr. 10 *do che sia CE eguale* * *a CD.*
* dim. 3. *Si tagli la retta BE in parti eguali al punto F*
Dal centro F, col raggio FB si descriva * *il*
* dim. 1 *mezzo circolo BGE.*

Si distenda la DC, sino al punto G. Io dico che il quadrato formato sopra la retta CG sia eguale alla figura rettilinea A.

III.

Imperciocchè essendo la retta BE divisa e-
*pr. 5. di questo. gualmente nel punto F, e disugualmente nel punto C, sarà il rettangolo * BCE, insieme col quadrato di FC, eguale al quadrato di FE, ovvero di FG: ma, a cagione dell'angolo retto FCG, il quadrato di FG è eguale a due quadrati di FC, CG: dunque sarà parimente il rettangolo BCE, insieme col quadrato di FC, eguale a' due quadrati di FC, CG; ovvero togliendone il medesimo quadrato di FG, il quale è comune, sarà il rettangolo BCE e-
*def. 1. di questo. guale al quadrato di CG; ma il rettangolo BCD, essendo formato * da' lati BC, CD è eguale al rettangolo BCE, perchè dalla costruzione CE è eguale CD: dunque sarà il

ret-

rettangolo BCD eguale al quadrato di CG; essendo dalla costruzione il rettilineo A eguale al rettangolo BCD; sarà il quadrato di CG eguale al rettilineo A; ciocchè dovea farsi.

Per mezzo di questa proposizione si può avere la misura di qualsivoglia figura rettilinea; imperciocchè non si ha da fare altro, che descrivere primieramente un quadrato eguale alla figura rettilinea data; dopo di che, se il lato del quadrato sia per esempio di 100. *palmi, tutta la superficie della figura conterrà* 100 *palmi quadrati, poichè altrettanti ne contiene il quadrato descritto. Gli antichi Geometri, quando volevano spiegare il valore di una figura, sempre procuravano di formare un quadrato, perchè il quadrato è una figura, che si misura più facilmente di qualsivaglia altra figura. Quindi questo problema porta ordinariamente il titolo di* quadratura delle figure rettilinee; *ed è celebre appo i Geometri il problema della* quadratura del circolo, *nel quale problema si domanda di* descrivere un quadrato eguale ad un circolo dato.

LIBRO TERZO

Difinizioni.

I.

I cerchi eguali sono quelli, i quali hanno i diametri, ovvero i semidiametri eguali.

II.

Una linea diritta dicesi toccare il cerchio, quando, *diciam così*, non fa altro, che baciarlo; *ovvero* quando l'incontra, in modo che essendo portata innanzi da ambe le parti non entra dentro ad esso

III.

Due cerchi diconsi toccarsi scambievolmente, quando, *diciam così*, non fanno altro, che baciarsi; *ovvero*; quando s'incontrano; in maniera chè qualche porzione di uno non entra dentro all'altro.

Due cerchi possono toccarsi in due maniere, al di dentro, ed al di fuori. *Diconsi due cerchi toccarsi*, al di dentro, *allora quando toccandosi, l'uno rimane tutto racchiuso dentro l'altro: Diconsi poi toccarsi* al di fuori, *quando toccandosi l'uno rimane tutto fuori dell'altro.*

IV.

Due linee diritte si dicono essere egualmente lontane dal centro, allora quando le due perpendicolari cadenti dal centro sopra le medesime sono eguali fra di loro.

V.

Ma quando le due suddette perpendicolari non sono eguali, non si diranno le due linee egualmente lontane dal centro; ma quella si dirà starne più lontana, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

Spie-

Spiegazione.

Se vi sia sopra una superficie piana una linea diritta, ed un punto fuori essa, egli è chiaro che la distanza del punto dalla linea diritta debba misurarsi dalla perpendecolare, che dal detto punto cade sulla medesima linea diritta. Quindi, se noi vorremo sapere, quanto sia la distanza di una corda, o sottesa di un circolo dal di lui centro, ci bisognerà far cadere dal centro sopra la sottesa una perpendicolare: che poi, quanto è la lunghezza di essa, altrettanto sarà la distanza della sottesa dal centro. Ciò premesso, se vi sono dentro ad un cerchio due sottese, sopra le quali cadano le perpendicolari dal centro; esse si diranno essere egualmente lontane dal centro, ove le due suddette perpendicolari siano eguali fra di loro; laddove, essendo le perpendicolari disuguali, quella si dirà starne più lontana, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

VI.

L' angolo della porzione è un angolo mistilineo formato dalla base della porzione, e dalla sua circonferenza.

VII.

Angolo nella porzione è un angolo rettilineo formato da due linee rette tirate da qualsivoglia punto della circonferenza a' termini della base della porzione.

Spiegazione.

Nella definizione XIX. *del libro* I. *si disse che la porzione del cerchio è* una figura piana mistilinea contenuta da una parte qualsivoglia di circonferenza, e dalla linea retta, che le

serve di base. *Quindi in ogni porzione di cerchio vi sono due angoli mistilinei formati dalla base, e dalla circonferenza della porzione. Questi due angoli mistilinei sogliono chiamarsi da' Geometri* angoli della porzione. *Ma, se preso un punto ad arbitrio nella circonferenza della porzione s' intendano da esso tirate due linee rette all' estremità della base della suddetta porzione, si darà luogo ad un angolo rettilineo avendo la punta nella circonferenza nella porzione. Cotesto angolo suole chiamarsi* angolo nella porzione, *a differenza dell' altro, che dicesi* angolo della porzione. *Del rimanente siccome infiniti sono i punti, i quali si possono prendere nella circonferenza della porzione, così infiniti saranno gli angoli, che si possono formare dentro ad una medesima porzione: laddove gli angoli della porzione non sono più di due. Finalmente, siccome la porzione di cerchio è di tre sorte; cioè, maggiore, minore, ed eguale ad un mezzo cerchio, così gli angoli della porzione e nella porzione sono di tre sorte: I. Angoli della porzione, e nella porzione maggiore: II. Angoli della porzione, e nella porzione minore: III. Angoli del mezzo cerchio, e nel mezzo cerchio.*

VIII.

Ogni angolo rettilineo, che ha la sua punta nel centro di un cerchio, dicesi angolo al centro.

IX.

Ogni angolo rettilineo, che ha la punta nella circonferenza di un cerchio, dicesi angolo alla circonferenza.

X.

Nell' uno, e nell' altro caso quella parte di circonferenza, la quale rimane interposta fra' due lati dell' angolo, dicesi base del medesimo: *cioè nel primo caso*, base dell' angolo al centro, e *nell' altro caso*, base dell' angolo alla circonferenza.

DEL-

Biblioteca Nazionale
NAPOLI

DELLA MISURA DELL' ANGOLO.

Se due linee rette sono perpendicolari, l'una all' altra, è noto, che intorno il punto comune ad entrambe si costituiscono quattro angoli retti. Intendendo ora tutti questi quattro angoli retti essere compartiti in 360 angoletti eguali, si capirà facilmente, ad ogni angolo retto ne spettano 90.; di modo che dando il nome di grado a ciascuno di questi angoletti eguali, noi diremo per innanzi, che l' angolo comprende 90. gradi, che l' ottuso ne comprende più di 90, e meno di 180; e che l' acuto ne comprende meno di 90. Quindi, poichè i tre angoli di ogni triangolo sono eguali a due retti, verrà a dire, che i tre angoli di ogni triangolo sono eguali a 180. gradi. pr. 32. I.

Intendesi presentemente dal punto comune alle due perpendicolari come centro, e con qualsivoglia raggio sia grande, sia piccolo, descritto * *un cerchio intorno i suddetti angoli retti. Ella è cosa chiara, che la di lui circonferenza rimarrà ancora essa compartita in 360. parti eguali da' 90. angoletti divisati* *, *quindi, quante parti comprende qualsivoglia angolo sia acuto, sia ottuso delle 360 nelle quali s' intendano compartiti i quattro angoli retti, altrettante parti conterrà la base del medesimo angolo delle 360, nelle quali si divide tutta la circonferenza del cerchio; di modo che potrassi dire, che quanti gradi contiene un angolo, altrettanti gradi contiene la base di esso, intendendo per base quella parte di circonferenza, che rimane interposta fra i lati dell' angolo, purchè però la circonferenza abbia per centro la punta dell' angolo: o viceversa quanti gradi contiene la base di un angolo, altrettanti ne contiene l' angolo istesso. Il medesimo discorso ha luogo, se ciascuno de' suddetti 360. angoletti eguali s' intenda diviso in 60. particelle ancora eguali, che noi chiameremo*

* dim. 3.

* Veggasi l' avvertimento della pr. 26. di questo.

ti; sicchè l'angolo AEG è retto, ma dalla costruzione è ancora retto l'angolo AEC; dunque l'angolo minore AEC è eguale al maggiore AEG, ciocchè non potendo sussistere, si dee dire, che il punto F sia il centro richiesto: ciocchè dovea farsi. *ass. 12.

Corollarj.

Quindi s'inferisce: I. Che se una linea retta tirata nel cerchio sega una sottesa dell'istesso cerchio per mezzo, ed angoli retti, il centro del cerchio sta nella linea segante. Così il centro del cerchio ABC è situato nella linea CE, che sega la sottesa AB per mezzo, e ad angoli retti: II. Che se due cerchi * *AEBG, AFBH si segano ne' punti A, e B, i quali siano congiunti dalla retta AB, i centri C, e D, e i due sudetti cerchi siano situati nella retta GEPH, che divide la sottesa comune AB per mezzo, e ad angoli retti; III. Che la linea retta, la quale unisce i centri C, e D de' due cerchi AEBG, AFBH, i quali si segano ne' punti A, e B, divida per mezzo la sottesa comune AB, e di più la divida ad angoli retti.* FIG. 11.

PROP. II. TEOREMA

Se nella circonferenza di un cerchio si prendano due punti ad arbitrio; la linea retta, che li congiunge caderà tutta dentro del cerchio.

I.

Nella circonferenza del cerchio BCD si prendano due punti ad arbitrio B, e C; io dico, che la linea retta BC, che gli unisce cade dentro al cerchio. FIG. 2.

II.

Ritrovisi * *il centro A del circolo BCD.* * *pr. ant.*

Nella linea retta BC prendasi il punto E ad arbitrio.

Si

* *dim.* I. *Si uniscano* * *le linee AB, AE, AC.*

III.

Siccome dalla costruzione A è il centro del cerchio BCD, così saranno i due raggi AB AC eguali fra di loro; il perchè il triangolo, ABC sarà isoscele, e come tale avrà gli an-
* *pr.* 1. *I.* goli sopra la base ABC, ACB eguali *: ma l'angolo esteriore AEC del triangolo AEB è
* *pr.* 16. *I.* maggiore* dell'angolo interiore opposto ABE; dunque il medesimo angolo *AEC*, sarà ezian-
* *ass. I.* dio maggiore * dell'angolo ACE. Quindi nel triangolo AEC, essendo l'angolo AEC maggiore dell'angolo ACE, sarà il lato AC mag-
* *pr.* 29 *I.* giore * del lato AE Ma il lato AC tocca la circonferenza: dunque il lato AE non ci arriva, non che la passa: e per tanto il punto E preso ad arbitrio nella BC è dentro al cerchio. Ora, siccome l'istesso va per tutti gli altri punti, così dee dirsi, che la retta BC cade tutta dentro al cerchio; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP III. TEOREMA.

Se una linea resta passante per lo centro sega un' altra linea retta che non passa per lo centro per mezzo, la segherà ad angoli retti, e segandola ad angoli retti, la segherà per mezzo.

I.

Sia il cerchio BEGD, nel quale la retta
* *FIG.* 3. DE passante per lo centro A seghi la retta BG, la quale non passa per lo centro nel punto F. Io dico, che se la sega per mezzo, la segherà ad angoli retti; e segandola ad angoli retti la segherà per mezzo.

II.

Si uniscano * *i raggi AB, AG.*

III.

* *dim. I.* I. Siccome dalla supposizione la BF è eguale alla

alla FG, e la FA è comune; così saranno i due lati BE, FA del triangolo BFA eguale a' due lati GF, FA del triangolo GFA, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo la base AB eguale alla base AG per essere linee cadenti dal centro alla circonferenza, sarà * l'angolo BFA eguale all'angolo GFA: laonde l'uno, e l'altro sarà * retto, di modochè rimane vera la prima parte della proposizione.

* *pr.* 8. *I.*

* *def.* 10. *I.*

II. Passando ora all'altra parte; io dico, che siccome il triangolo ABG è isoscele, così l'angolo ABG sarà eguale * all'angolo AGB; ma dalla supposizione l'angolo AFB è eguale all'angolo AFG: poichè l'uno e l'altro è retto; dunque due angoli ABF, AFB del triangola ABF sono eguali a due angoli AGF, AFG del triangolo AGF, ciascuno a ciascuno: quindi essendo di più il lato AF, opposto ad uno degli angoli eguali comune ad entrambi i triangoli; sarà * il lato BF eguale al lato BG; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* 5. *I.*

* *pr.* 62. *I.*

PROP. IV. TEOREMA.

Se due linee rette non passanti per lo centro, si seghino dentro di un cerchio, non si segheranno mai per mezzo.

I.

Nel cerchio BCDE le due linee rette BD, CE non passanti per lo centro A si seghino nel punto F; io dico, che non si potranno segare per mezzo.

II.

Se mai sia possibile; rimangono entrambe segate per mezzo, di modo chè sia CF eguale ad FE, e BF eguale ad FD.

FIG. 4.

*Dal centro A si unisca * la AF.*

* *dim.* 1.

Si

Si distenda dall' una parte e dall' altra sino a'
* *dim.* 3. *punti G, ed H.*

III.

Perchè la linea GH passante per lo centro A sega per mezzo nel punto F, così la linea CE, come la linea BD, le quali non passano per lo centro, le segherà * ad angoli retti; quindi sarà così l'angolo AFD, come l'angolo AFE retto; e perciò saranno eguali fra di loro *; vale a dire, sarà la parte eguale al tutto; ciocchè non potendo sussistere, rimane vero il Teorema in quistione.
* *pr. ant.*
* *ass.* 12.

PROP. V. TEOREMA.

Due cerchi, che si segano, non possono essere concentrici; vale a dire, non possono avere il medesimo centro:

I.

FIG. 3. Seghinsi i due cerchi ABC, ADC, ne' punti A, e C; io dico, che essi non possono essere concentrici.

II

Se è possibile, abbiano l' istesso centro, il quale sia il punto E.

* *dim.* 1. *Si congiunga * la AE.*

Si tiri ad arbitrio la retta ADB, che seghi le circonferenze de' due cerchi ne' punti D, e B.

III.

Siccome E è il centro del cerchio ABC, così saranno le linee EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza eguali fra loro *. Similmente, siccome E è il centro del cerchio ADC, così le linee rette EA, ED cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali *. Il perchè essendo le due ED, EB eguali alla medesima EA, saranno * eguali fra di loro; vale a dire la parte sarà eguale al tutto; ciocchè non potendo sussistere; ne segue la verità del Teorema in quistione.
* *def.* 15. *I.*
* *def.* 15. *I.*
* *ass.* 1.

PROP

PROP. VI. TEOREMA.

Due cerchi, che si toccano al di dentro, non possono essere concentrici.

I.

I due cerchi ABC, ADE toechinsi al di dentro del punto A; io dico, che essi non possono essere concentrici. *Fig. 6.*

II.

Se è possibile sia il punto F il centro dell' uno, e dell' altro cerchio.

Si unisca * *la FA.* * *dim.* 1.

Si tiri la retta FDB al arbitrio, la quale seghi le circonferenze de' due cerchi ne' punti D, e B.

III.

Siccome F è il centro del cerchio ABC, così le linee FA, FB cadenti del centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro*. Parimente, siccome F è il centro dal cerchio AE, così le linee FA, FD cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra loro** Quindi, essendo ciascuna delle due BF, DF eguale alla medesima AF, saranno* esse eguali fra di loro; vale a dire, sarà la parte eguale al tutto: ciocchè non potendo sussistere, resta stabilita la verità del Teorema in quistione.

* *def.* 15.

** *def.* 15.

* *ass.* 1.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se dal centro di un cerchio si fanno cadere più linee alla circonferenza, egli è chiaro dalla def. XV. *del libro I., che esse sono tutte eguali fra di loro. Ma se da un punto preso dentro al cerchio, il quale non sia il suo centro, si facciano cadere più linee intorno intorno alla di lui circonferenza, queste linee non potranno essere eguali fra di loro, ma alcune saranno più grandi, altre più picciole, e fra le*

le più grandi ve ne sarà una, la quale sarà la massima, siccome fra le più picciole ve ne sarà una, che sarà minima. Euclide *dunque nella proposizione seguente, prende a determinare quale sia la massima delle suddette linee, quale la minima, e quali siano mezzanamente grandi.*

PROP. VII. PROBLEMA.

Se nel diametro di un cerchio si prende un punto, che non sia il suo centro, dal quale cadano alla di lui circonferenza intorno intorno più linee rette. La massima sarà quella, la quale passa per lo centro. La minima sarà la rimanente porzione del diametro. La più vicina a quella, che passa per lo centro, sarà sempre maggiore della più lontana. Dal suddetto punto non cadranno alla circonferenza del cerchio più di due linee rette eguali, una di qua, ed un' altra di là della minima.

I.

FIG. 7. Sia il cerchio ABCD, nel di cui diametro AD si prenda il punto F diverso dal centro E, dal quale cadano alla circonferenza del cerchio più linee rette, come FA, FB, FC, FD; io dico dunque in primo luogo, che la FA, la quale passa pel centro E sia la massima, vale a dire, che ella sia maggiore di FB, e di qualunque altra linea, che dal punto F sia tirata alla circonferenza ABCD. Dico di più, che la FD, la quale è la parte rimanente del diametro sia la minima, vale a dire, che essa sia minore di FC, e di qualunque altra linea cadente dal punto F alla circonferenza ABCD. Dico in oltre, che FB, la quale più si avvicina alla massima è maggiore di FC, che più se ne allontana; e finalmente io dico, che dal punto F due linee sole eguali si possono tirare una di qua, ed un'altra di là della minima FD.

II.

I.

I Per dimostrare, che FA sia maggiore di FB, *s' intenda congiunta la EB* *. Siccome le due EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali fra loro, così, aggiugnendo ad esse comunemente EF, sarà tutta la AF eguale alle due BE, EF unite insieme *: ma le due BE, EF unite insieme sono maggiori * di BF; dunque sarà parimente la AF maggiore * di BF.

*dim. 1.
*assio. 2.
*pr. 20. I.
*assio. 1.

II. Per dimostrare, che FD sia minore di EC, *fa duopo congiungere* * EC. Siccome nel triangolo EFG il lato EC è minore de' due lati EF, FC uniti insieme *; così essendo il raggio EC eguale al raggio ED, sarà parimente ED minore delle due EF, FC: sicchè togliendone via la EF, la quale è comune, sarà l'avanzo * FD minore dell'avanzo FC.

*dim. 1.
*pr. 20. I.
*assi. 5.

III. Per dimostrare poi, che FB sia maggiore di FG, diremo così. Essendo EB eguale ad EC, perchè sono linee cadenti del centro alla circonferenza, ed EF essendo comune: saranno i due lati EB, EF del triangolo BEF eguali a' due lati EC, EF del triangolo CEF, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo l'angolo BEF maggiore dell'angolo CEF, sarà la base BF maggiore della base CF *.

*pr. 24. I.

IV. Finalmente dimostreremo che dal punto F due linee eguali solamente si possono tirare, una di qua ed un'altra di là della minima FD. *Facciasi l'angolo DEG * eguale all'angolo DEC, e si unisca* * FG; io dico, che le due FC, FG sono eguali fra di loro: Imperciocchè, essendo il raggio EC eguale al raggio EG, e la EF essendo comune; saranno i due lati CE, EF del triangolo CEF eguali a due lati GE, EF del triangolo GEF, ciascuno a ciascuno: quindi, essendo di più dalla costruzione l'angolo

*pr. 13. I.
*dim. 1.

CEF eguale all'angolo GEF: sarà la base FC eguale alla base FG: da che si vede, che dal punto F si possono far cadere alla circonferenza del cerchio due linee eguali: ma io dico, che è impossibile di tirarne un altra eguale a ciascuna delle due FC, FG: imperciocchè quest' altra, o si avvicina più ad FA, e sarà maggiore così di FC, come di FG; o se ne allontana più, e satà minore di esse, per quello, che si è dimostrato: dimodochè rimangono stabilite tutte le parti del Teorema in quistione.

Corollario.

Essendosi dimostrato, che da un punto preso dentro di un cerchio diverso dal di lui centro non si possono tirare alla circonferenza più di due linee eguali, ne segue, che ove da un punto preso dentro di un cerchio potesse cadere alla di lui circonferenza più di due linee eguali, quel punto debba essere il centro del cerchio.

PROP. VIII. TEOREMA.

Se fuori di un cerchio si prende un punto, dal quale si facciano cadere tanto alla parte concava, quanto alla parte convessa della sua circonferenza più linee rette: di tutte quelle, che vanno a terminare alla parte concava. La massima è quella la quale passa per lo centro. Quella, che si avvicina più alla medesima è maggiore delle più lontane. Dal detto punto due sole linee eguali si possono tirare, una di qua; ed un' altra di là della massima. Di tutte quelle poi, che si arrestano alla parte convessa, la minima è quella, che portata innanzi passa per lo centro. Questa, che più si avvicina alla minima è minore della più lontana. Finalmente dal suddetto punto due linee eguali si possono tirare, una di qua, ed un' altra di là della minima.

Sia

I.

Sia il cerchio FDBK, fuori del quale si prenda il punto A, donde si facciano cadere così alla parte concava, come alla parte convessa della sua circonferenza più linee rette AHD, AGC, AFC, ALK; una delle quali passi per lo centro E. Io dico dunque, che fra tutte quelle, le quali vanno a terminarsi alla parte concava, la massima sia AB, la quale passi per lo centro E. Di più, che AC, la quale più si avvicina alla massima è maggiore di AD, che più se ne allontana; e finalmente, che dal punto A due rette linee eguali si possano far cadere alla parte concava, una di qua, ed un'altra di là della massima. Di quelle poi, che si arrestano alla parte convessa; io dico, che la minima sia AF, la quale distesa oltre, passa per lo centro E: di più, che AG, la quale più s'avvicina alla minima è minore di AH, che più si allontana; e finalmente, che dal punto A solamente due linee rette eguali si possono far cadere alla detta parte convessa, una di qua, ed un'altra di là della minima. *FIG.* 3.

I. Per dimostrare tutte queste cose ordinatamente faremo vedere in primo luogo che AB sia maggiore di AC. *Congiungasi* * *EC.* Perchè i due raggi EC, EB sono eguali fra loro, aggiugnendo ad entrambi la medesima linea retta AE, sarà, * la somma delle AE, EG eguali a tutta la AB; ma la somma delle due AE, EC è maggiore * di AC, dunque sarà parimente la AB maggiore di AC. * *dim.* I. * *ass.* I. * *pr.* 20. I.

II. Passeremo poi a dimostrare, che AC sia maggiore di AD. *Si congiunga* * *ED.* Siccome i due raggi EC ED sono eguali fra di loro, e la AE è comune: così saranno i lati AE, * *dim.* I.

EC del triangolo AEC eguali a' lati AE, ED del triangolo AED, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo l'angolo AEC maggiore dell'angolo AED, sarà la base * AC maggiore della base AD.

* pr. 24. I.

III. Dimostreremo finalmente, che dal punto A due linee rette sole eguali si possono far cadere alla parte concava: *Facciasi* * *l'angolo AEK eguale all'angolo AED. E poi si unisca EK**: Perchè i due raggi ED, EK sono eguali fra di loro, e la AE è comune: saranno i due lati AE, ED del triangolo AED eguali a' due lati AE, EK, del triangolo AEK, ciascuno a ciascuno: quindi essendo dalla costruzione l'angolo AED eguale all'angolo AEK, sarà la base AD eguale * alla base AK. Ora non si può immaginare un'altra linea retta eguale a queste due: poichè essa, se più di avvicina alla mezzana, sarà maggiore, se più se ne allontana sarà minore delle medesime.

* pr. 23. I.
* dim. 1.
* pr. 4 I.

I. Passando ora alle linee rette, che si arrestano alla parte convessa della circonferenza, dimostreremo primieramente, che la AF sia la minima. *Si uniscano le due*, GE, HE. Perchè nel triangolo AGE, i due lati AG, GE sono maggiori * del lato rimanente AE; togliendone via GE, ed FE, che sono eguali fra loro, per essere raggi del cerchio, sarà l'avanzo AG * maggiore dell'avanzo AF.

* pr. 20 I.
* ass. 5.

II. Dimostreremo inoltre, che AG sia minore di AH. Perchè i due raggi EG, EH sono eguali fra loro, ed EA è comune: saranno i due lati GE, EA del triangolo GEA eguali a' due lati HE, EA del triangolo HEA, ciascuno a ciascuno; quindi essendo l'angolo GEA minore dell'angolo HEA, sarà la base * AG minore della base AH.

* pr 24. I.

III.

III. Finalmente dimostreremo, che dal punto A due linee sole eguali si possono tirare alla parte convessa della circonferenza, una di qua, e un'altra di là della minima. *Facciasi* * *l'angolo AEL angolo BEH: ciò fatto, si unisca la retta* AL*: siccome i due raggi EH,* EL sono eguali fra loro, e la BA è comune, così saranno i due lati HE, EA del triangolo HEA eguali a due lati LE, EA del triangolo LEA, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo dalla costruzione l'angolo HEA eguale all'angolo LEA, sarà la base AH eguale alla base AL. Ora non si può immaginare una terza linea retta eguale a coteste due; imperciocchè, se essa è più vicina alla minima AF sarà minore, se è più lontana dalla minima sarà maggiore delle due suddette linee; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* 23. I.

* *dim.* 1.

PROP. IX. PROBLEMA.

Se da un punto preso dentro la circonferenza di un cerchio cadano alla detta circonferenza più di due linee rette eguali, il detto punto sarà centro del cerchio.

I.

Dentro al cerchio ABCG sia preso il punto D, dal quale cadano alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali, cioè DA, DB, DC: io dico, che il punto D è centro del cerchio ABCG.

FIG. 9.

II.

Si congiungano * *le rette AB, BC.* * *dim.* 1.

Ciascuno delle quali si seghi per mezzo * *ne' punti F, ed F.* * *pr.* 10. I.

Si uniscano * *le rette DE, DF.* * *dim.* 1.

Si distendano * *in H, e G, in K, e L.* * *dim.* 2.

III.

Siccome dalla costruzione la AE è eguale alla BE, e la ED è comune; così saranno i due lati AE, ED del triangolo AED eguali

a' due lati BE, ED del triangolo BED, ciascuno a ciascuno: quindi, essendo dalla sup. posizione la base AD, eguale alla base BD;
* *pr.* 8. I. sarà l'angolo AED eguale all'angolo BED: e perciò la retta HEG sarà perpendicolare *
* *def.* 10. sopra la BA. Segando dunque * la retta HEG la sottesa BA per mezzo, e ad angoli retti,
* *Cor.* 1. *della pr.* 1. essa dee contenere * il centro del cerchio. Similmente, essendo dalla costruzione la BF eguale alla CF, e la DF essendo comune; saranno i due lati BF, FD del triangolo BFD, eguali a due lati CF, FD del triangolo CFD, ciascuno a ciascuno: quindi essendo dalla supposizione la base BD eguale alla base CD,
* *pr.* 5. *l.* sarà l'angolo BFD eguale all'angolo CFD:
* *def.* 10. e perciò la retta KFL sarà perpendicolare * sopra la BC. Secando dunque la retta KFL la sottesa BC per mezzo, e ad angoli retti,
* *Cor.* 1. *della pr.* 1. essa dee contenere * il centro del cerchio. Laonde, dovendosi il centro ritrovare, così nella retta KL, è forza, che sia il punto D, il quale solamente è comune all'una, ed all'altra, ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. X. TEOREMA.

Un cerchio non sega un altro cerchio in più di due punti.

I.

FIG. 10. Siano i due cerchi ABCDE, AFCGE; io dico, che essi non si possono segare in più di due punti.

II.

Se mai è possibile, si seghino in tre punti, i quali siano A, C, E.

* *pr.* 1. *di questo* *Si ritrovi il centro del cerchio ABCDE* * *il quale sia H.*
* *dim.* 1. *Si uniscano* * *HA, HC, HE.*

III.

Siccome dalla costruzione H è il centro del cerchio ABCDE; così le linee HA, HC, HE

ca-

cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro *. Quindi, essendosi dentro al cerchio AFCGE preso il punto H, dal quale cadono alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali: esso sarà il centro * dell' istesso cerchio ADCGE: ma dalla costruzione è centro parimente del cerchio ABCDE: dunque due cerchi, che si segano hanno il medesimo centro, ciocchè non potendo sussistere *, ne segue la verità del Teorema in quistione.

* *def.* 15.

* *pr.* ant. *di questo*

* *pr.* 1. *di questo*

PROP. XI. PROBLEMA.

La linea retta, che unisce i centri di due cerchi, che si segano al di dentro prolungata verrà a cadere nel punto del segamento.

I.

Tocchinsi i due cerchi AED, ACB al di dentro nel punto A, io dico, che la linea la quale congiugne i centri de' cerchi suddetti prolungata verrà a cadere nel punto del toccamento A.

FIG. 11

II.

*Si ritrovino * i centri de' due cerchi: e sia per esempio F il centro del cerchio esteriore, e G il centro del cerchio interiore.*

*Si unisca * la FG, la quale, se mai è possibile, distesa dall' una parte, e dall' altra non vadi nel punto del toccamento A, ma più tosto ne' punti D, ed E.*

*Si uniscano * le due AF, AG.*

* *pr.* 1. *di questo.*

* *dim.* 1.

* *dim.* 1.

III.

Nel triangolo AGF i due lati AG, GF ** sono maggiori del rimanente AF: ma AF è eguale ad FD *: perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque saranno similmente le due AG, GF maggiori * di FD: il perchè togliendone via la FG, la quale è comune, rimarrà l'avanzo AG maggiore ** dell' avanzo GD: ma essendo dalla costruzione G

** *pr.* 20. 1.

* *def.* 15.

* *ass.* 1.

** *ass.* 5.

centro del circolo interiore, la GA è eguale
*def.15. I. al a GB * dunque sarà similmente la GB mag-
* ass.1. giore * della GD; vale a dire la parte mag. giore del suo tutto: ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

PROP. XII. TEOREMA.

La linea diritta, la quale unisce i centri di due cerchi, che si segano al di fuori; passa per lo punto del toccamento.

I.

FIG.12. Tocchinsi i due cerchi ABC, ADE al di fuori nel punto A; io dico, che la linea retta, la quale unisce i loro centri dee passare per lo punto del toccamento A.

*pr.1. di questo. *Si ritrovino* * *i centri de' due cerchi ABC. ADE, i quali siano F, G.*

* dim.1. *Si unisca* * *la FG, la quale, se mai è possibile, non passi per lo punto del toccamento A.*

* dim.1. *Si uniscano* * *le due AF, AG.*

II.

Siccome i punti F, e G sono rispettivamente centri de' cerchi ABC, ADE; così sarà il raggio FA eguale al raggio FB, ed il raggio GA eguale al raggio GD: e perciò le due FA, AG, unite insieme saranno eguali alle due FB, GD unite insieme: ma tutta FG è
* ass.9. maggiore delle due FB, GD unite insieme *;
* ass.1. dunque sarà ancora la FG maggiore * delle due AF, AG: vale a dire nel triangolo AFG sarà il lato FG maggiore degli altri due FA, AG; ciocchè non potendo sussistere; ne segue la verità del Teorema in quistione.

PROP. XIII. TEOREMA.

Un cerchio, o che tocchi al di dentro, o che tocchi al di fuori un altro cerchio, lo toccherà in un punto solo.

I.

Tocchinsi i due cerchi ABC, ADE al di dentro, ed i due cerchi ABC, AB al di fuori nel punto A; io dico, che essi si toccheranno in un punto solo, quale è A. *FIG.13.*

II.

Supponendo primieramente, che i cerchi ABC, ADE si tocchino al di dentro.

*Si trovino * i loro centri, quali siano* G, *ed* F. **pr.1. di questo.*

*Si unisca * la* GF, *la quale prolungata verrà a cadere nel punto del toccamento A *.* **dim.1.* **pr.1. di questo.*

Si tiri la retta GDB *ad arbitrio.*

Supponendo poi che i cerchi ABC, AI si tocchino al di fuori.

*Si trovino * ancora i loro centri K, ed F.* **pr. 1. di questo*

*Si unisca * KF, la quale passerà per lo punto del toccamento A.* ** dim.1.*

Si tiri ad arbitrio la retta KIB. **pr.ant.*

I. Siccome nel diametro AC del cerchio ABC si è preso il punto G diverso del centro F; così sarà * GC la massima, e CA sarà la minima; e perciò sarà GA minore di GB. Ma GA è eguale a GD *; perchè G dalla costruzione è centro del circolo ADE; dunque sarà eziandio * GD minore di GB. E perciò il punto D della circonferenza ADE è diverso dal punto B della circonferenza ABC: ora la medesima dimostrazione avendo luogo ancora negli altri punti delle due circonferenze, poichè si è tirata ad arbitrio alla retta GEB, ne segue, che i due cerchi ABC, ADE si toccano nel solo punto A. **pr.7. di questo.* **def.15.* ** ass.1.*

II. Inoltre, perchè fuori del cerchio ABC si è preso il punto K, dal quale si è tirata la linea KA, passante per lo centro, sarà * KA la minima, vale a dire sarà KA minore di KB ma KA è egua- **pr.8. di questo.*

*def.15. I. è eguale a KI * perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza: dunque sarà simil-
* ass.1. mente KI minore di AB *, e perciò il punto I della circonferenza AI è diverso dal punto B della circonferenza ABC; quindi l'istessa dimostrazione avendo ancora luogo negli altri punti delle due circonferenze, poichè si è tirata ad arbitrio la retta AB; ne segue, che i due cerchi ABC, AI si toccano nel solo punto A.

PROP. XIV. TEOREMA.

Nel cerchio le linee rette eguali sono egualmente lontane dal centro. Quelle, che sono egualmente lontane del centro, sono eguali fra di loro.

I.

Nel cerchio ABCD, che ha per centro il
FIG 14. punto F, ci siano due linee AB, DC io dico, che se queste due linee sono eguali, esse saranno egualmente lontane dal centro; e viceversa, se sono egualmente lontane dal centro, esse saranno eguali.

II.

*Dal centro F si facciano cadere le perpendicolari FE, FG * sopra le rette AB, DC.*

*pr.12.I. *Si uniscano * le rette FA, BD.*

*dim.3. III.

Perchè la retta FE passante per lo centro divide la retta AB, che non passa per lo centro ad angoli retti nel punto E, la dividerà * per mezzo nell'istesso punto E, e per-
*pr 3. *ciò* sarà AE eguale a BF, e per conseguente
*questo. AB doppia di AE. Similmente, perchè la retta FG passante per lo centro divide la retta CD, che non passa per lo centro ad angoli retti nel punto G; la dividerà per mezzo nell'istesso punto G; e perciò sarà DG eguale a GC, e per conseguente DC doppia di DG.

Ciò

Ciò premesso, supponendo I che AB sia eguale a DC, sarà * la metà AE eguale alla metà DC, ed il quadrato di AE sarà eguale al quadrato di LG, siccome ancora sarà il quadrato del raggio AF eguale al quadrato del raggio DF. Ma a cagione dell'angolo retto AEF il quadrato dell'ipotenusa ** AF è eguale a' quadrati de' lati AE. EF: e per la medesima ragione il quadrato dell'ipotenusa DF è eguale a' quadrati de' lati DG, GF: dunque saranno similmente i quadrati de' lati AE, EF eguali a' quadrati de' lati DG, GF: quindi essendosi dimostrato, che il quadrato di AE sia eguale al quadrato di DG, sarà similmente il quadrato di EF eguale al quadrato di GF; e per conseguente sarà la EF eguale alla GF. Dal che ne segue, che le linee rette AB, DC sono egualmente lontane dal centro *. * ass. 1. ** pr. 47. I. * def. 4. di questo.

Supponendo II. che le due rette AB, CD siano egualmente lontane dal centro F., vale a dire, supponendo, che EF sia eguale a GF sarà il quadrato di EF eguale al quadrato di GF; siccome il quadrato del raggio FA sarà eguale al quadrato del raggio FD. Ma il quadrato del raggio FA è eguale a' quadrati di EE, ed EA *; ed il quadrato del raggio FD è eguale a' quadrati di FG, GD: dunque saranno i due quadrati FE, e di EA insieme eguali a' due quadrati FG, e di GD insieme: quindi, essendo il quadrato di EF eguale al quadrato di FG, sarà il quadrato di EA eguale al quadrato di GD, e per conseguente la EA sarà eguale alla GD: ma la BA è doppia della GD; dunque sarà * la BA eguale alla CD. cioechè dovea dimostrarsi. * pr. 47. I. * ass. 6.

PROP.

PROP. XV. TEOREMA.

Di tutte le linee tirate in un cerchio, la massima è il diametro; e quella, che sta più vicina al centro è maggiore di quella, che ne sta più lontana.

I.

FIG. 15. Nel cerchio CDFE vi siano tre linee rette CD, AB EF, delle quali la AB sia diametro, e la CD sia più vicina al centro G della EF; io dico primieramente, che AB è la massima vale a dire è maggiore di CD, e di EF, e di qualsivoglia altra linea tirata nel cerchio. Dico di più, che la CD è maggiore della EF.

II.

**pr.*12.I. *Dal punto G si facciano* * *cadere le perpendicolari GH, GK sopra le rette CD, EF. Quindi, poichè la linea retta EF si suppone più lon-*
def.*5 *di questo.* *tana dal centro G della linea retta CD, sarà *la GK maggiore della GH.*
**pr.*3.I *Taglisi dunque* * *la GL eguale alla GH.*
**dim.*11.I. *Dal punto L s'innalzi* * *la perpendicolare LM*
* *dim.* 2. *sopra la GK, la q***ale si distenda** *fino al*
* *dim.* 1. *punto N.*

*Si uniscano** *le rette GC, GD, GM, GN, GE, GF.*

III.

I. Siccome la GA è eguale alla GC, e la GB è eguale alla GD; perchè sono linee cadenti del centro alla circonferenza, così sarà tutta la AB eguale alle due GC, GD unite insieme. MA
pr.*20.I. le due GC, GD unite insieme sono maggiori**
* *ass.* 1. CD; dunque ancora AB sarà maggiore* di CD.

II. Siccome dalla costruzione le perpendicolari GL; GH cadenti dal centro G sopra le rette CD, MN sono eguali tra di loro; così le medesime
* *pr. ant.* rette CD, MN saranno* parimente eguali;
**pr.*10.I. ma MN è maggiore della EF*, a causa che

so-

sono esse basi de' triangoli MGN, EGF, i quali hanno i lati MG, GN eguali a' lati EG, GF, e l'angolo MGN contenute sotto i primi lati maggiori dell'angolo EGF contenuto sotto gli altri due lati; dunque sarà parimente la CD maggiore * della EF * ass. 7.

PROP. XVI. TEOREMA.

I. La linea retta, che insiste perpendicolarmente all' estremità del diametro di un cerchio, cade tutta fuori di esso, vale a dire è tangente: II. Nel luogo, che è fra la detta linea, e la circonferenza del cerchio non ci può cadere alcun' altra linea retta: III. L' angolo del mezzo cerchio è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo: IV. L' angolo formato dalla circonferenza del cerchio, e dalla tangente, il quale suole chiamarsi angolo del contratto *è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo.*

I.

Sia il cerchio ABC intorno al centro D, ed al diametro AB; io dico primieramente, che la linea retta AE tirata dal punto A ad angoli retti sopra la AB cade tutta fuori del cerchio, e per conseguente è tangente. Inoltre, che nel luogo, che è fra la perpendicolare AE, e la circonferenza AC del cerchio non può cadervi altra linea retta Di più, che l'angolo del mezzo cerchio CAB è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo; e finalmente, che l'angolo mistilineo CAE formato dalla circonferenza del cerchio, e dalla perpendicolare, il quale angolo suole chiamarsi angolo *del contratto* sia minore d'ogni angolo acuto rettilineo. *FIG.* 16

II.

I. Che la linea retta AE, cada tutta fuori del cerchio, si dimostra così: *Prendasi nella AE qualsivoglia punto F; e si unisca* * *la DF.* * *dim.* I. Per vicino che sia il punto F al punto

A,

A, sempre in tal modo si verrà a costituire il triangolo DAF, il quale è rettangolo in A dalla supposizione: laonde, essendo l'angolo DAF retto, sarà l'angolo DFA minore del retto *; e per conseguente il lato DF sarà maggiore * del lato DA: ma il lato DA è eguale a DC; perchè sono linee cadenti del centro alla circonferenza; dunque sarà parimente DF maggiore di * DC; e perciò il punto F sarà più in là della circonferenza del circolo. Ora, poichè l'istessa dimostrazione va per tutti gli altri punti, poichè il punto F è stato preso ad arbitrio; ne segue, che la perpendicolare AE cade tutta fuori del cerchio.

* *pr.* 17. *I.*

* *pr.* 19. *I.*

ass. 1.

II. Che poi nel luogo fra la tangente AE, e la circonferenza del cerchio non possa cadervi altra linea retta, si dimostra così: Nell'angolo DAE *si tiri qualsivoglia retta AH*: per vicina che ella sia alla tangente AE, vale a dire, per acuto che sia l'angolo HAE sempre l'angolo rimanente DAH sarà minore del retto: *e perciò dal punto D si potrà* * *far cadere sopra la retta, AH la perpendicolare* DH. Poichè dunque nel triangolo DHA, l'angolo DHA è retto, e l'angolo DAH è acuto, sarà il lato DA * maggiore del lato DH ma DA è eguale a DC, perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque sarà DC maggiore di DH. Quindi il punto H della retta AH starà dentro la circonferenza del cerchio; e per conseguenza la retta AH debb' essere entrata dentro.

pr. 12. *I.*

* *pr.* 19. *I*

III. Quindi l'angolo del mezzo cerchio CAB dovrà esser maggiore di ogni angolo acuto rettilineo; perciocchè se vi fosse qualche angolo acuto rettilineo maggiore dell'angolo CAD, ne seguirebbe che adattato uno de' lati di cotesto an-

angolo sopra il diametro AB a cominciare dal punto A, l'altro lato dovrebbe cadere fra la circonferenza AC, e la tangente AE: ciocchè si è dimostrato impossibile.

IV. E finalmente l'angolo del contratto CAE debb'essere minore di ogni angolo acuto rettilineo: Perciocchè, se vi potesse essere un' angolo acuto rettilineo minore dell' angolo EAC; ne seguirebbe, che disteso uno de lati di cotesto angolo sopra la tangente AE; a cominciare dal punto A, l'altro lato dovrebbe cadere fra la tangente AE, e la circonferenza AC; ciocchè si è dimostrato essere impossibile.

Corollario.

*Da quì è manifesto, che una linea retta sola può toccare il cerchio in un punto dato, e che ogni altra linea retta dee entrare dentro al cerchio. Che per tirare la tangente al punto A fa duopo 1. tirare il diametro AB, e 2. dal punto A innalzare la perpendicolare AE sopra il retto diametro AB** pr.12.I.

PROP. XVII. TEOREMA.

Da un punto dato fuori di un cerchio tirare una linea, che tocchi il medesimo cerchio.

I.

Sia dato il punto A fuori del cerchio BC: fa duopo tirare dal punto A una linea, che tocchi il detto cerchio BC.

II.

*Si trovi il centro D * del cerchio BC.* * pr.1. quarto

*Si unisca * la AE.* * dim.1.

*Dal centro D, col raggio DA descrivasi * il cerchio AE.* * dim.2.

*Dal punto B s' innalzi * la BF perpendicolare sopra la AD.* * pr.11.I.

*Si unisca * la DF.* * dim.1.

Si unisca la AC; io dico, che questa tocca il cerchio nel punto B. III.

III.

Siccome D è centro de' cerchi AC, AF; così le linee rette DC, DB, e DA, DF cadenti dal centro alle circonferenze saranno eguali fra di loro: Quindi due lati DC, DA del triangolo CDA saranno eguali a' due lati DC, DF del triangolo BDF, ciascuno a ciascuno; sicchè, essendo in oltre l'angolo CDA contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all'angolo BDF contenuto sotto i lati dell'altro triangolo, sarà * l'angolo DCA eguale all'angolo DBF: ma quest'angolo DBF della costruzione è retto: dunque l'angolo DCA sarà parimente retto; quind insistendo la retta CA perpendicolarmente all'estremità del raggio CA, essa toccherà * il cerchio BC nel punto C; ciocchè dovea farsi.

pr.4.I.

** pr.ant.*

PROP XVIII. TEOREMA

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal centro al punto del toccamento si tira una linea retta, cotesta sarà perpendicolare alla tangente.

I

La linea retta DE tocchi il cerchio AFB nel punto, A, e dal centro C al punto A del toccamento s' intenda tirata la linea retta CA; io dico, che essa è perpendicolare alla tangente DE.

II.

Se mai è possibile non sia la CA perpendicolare alla DE, ma sia più tosto la CBD

Perchè nel triangolo CDA l'angolo CDA si vuole retto sarà l'angolo CAD acuto; e perciò l'angolo CDA sarà maggiore dell'angolo CAD; il perchè il lato CA sarà maggiore * del lato CD; ma CA è eguale a CB, perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza: dunque sarà parimente CB maggiore * di CD; val' a dire sarà

**pr.19.I.*

** ass. 1.*

la

la parte maggiore del tutto, ciocchè non potendo sussistere, ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XIX. TEOREMA

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal punto del toccamento s' innalza una perpendicolare alla tangente nella perpendicolare si troverà il centro del cerchio:

I.

La linea retta DE tocchi il cerchio AB nel punto A, e dal punto del toccamento A s' intenda innalzata la perpendicolare AB alla tangente DE; io dico, che in questa perpendicolare si ritrova il centro del cerchio. FIG. 19.

II.

Se mai è possibile trovisi il centro del cerchio fuori della perpendicolare AB, come per esempio in F.

Si unisca * *la* FA. * *dim.* 1.

III.

Perchè la FA unisce il centro del cerchio col punto del toccamento A, essa sarà perpendicolare alla tangente DE *: quindi l' angolo FAE sarà retto: ma dalla supposizione retto parimente l' angolo BAE; dunque l' angolo FA minore sarà eguale al maggiore CAE *: ciocchè non potendo sussistere; siegue la verità del Teorema in quistione. * *pr. ant.* * *ass.* 12.

PROP. XX. PROBLEMA.

Nel cerchio l' angolo al centro è doppio dell' angolo alla circonferenza, purchè però l' uno, e l' altro abbiano l' istessa circonferenza per base.

I.

Nel cerchio ABC ci sia l' angolo al centro BDC, FIG. 20.

BDC, e l'angolo alla circonferenza BAC, l'uno, e l'altro de' quali abbia per base la circonferenza BC; io dico, che l'angolo BDC è doppio dell'angolo BAC.

II.

* *dim.* 1. *Si unisca la retta AD, la quale si distenda*
* *dim.* 2. *fin al punto E* *, *e sia in primo luogo il punto E, fra i punti B, e C.*

Perchè D è centro del centro ABC; sarà il raggio DA eguale al raggio DB; quindi * *pr.* 5. I. l'angolo DAB sarà * eguale all'angolo DBA e per conseguente tutti due insieme saranno doppj dell'angolo DAB: ma tutti due insie- * *pr* 32. *I.* me sono eguali all'angolo esteriore BDE *, dunque l'angolo esteriore BDE, sarà doppio dell'angolo DAB. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo EDC sia doppio dell'angolo DAC, quindi tutto l'angolo al centro BDC sarà doppio dell'angolo alla circonferenza BAC.

Cada in secondo luogo il punto E più in là del punto B in riguardo al punto C: io dico parimente, che l'angolo al centro CDB, sia doppio dell'angolo alla circonferenza CAB. Perchè il raggio DA è eguale al raggio DC, * *pr.* 5. *I.* sarà l'angolo *DAC* eguale * all'angolo DCA; e tutti due insieme saranno doppj dell'angolo DAC: il perchè essendo tutti due insieme * *pr.* 32. *I.* eguali all'angolo esteriore CDE * sarà l'angolo esteriore CDE doppio dell'angolo DAC. Nell'istesso modo si dimostrerà, chd l'angolo BDE sia doppio dell'angolo BAD; dal che si raccoglie, che l'angolo rimanente CDB sia doppio dell'angolo rimanente CAB; cioc. chè dovea dimostrarsi.

Annotazione.

Essendo l'angolo al centro BDC doppio dell'an-

golo

galo alla circonferenza BAC, ne segue, che se l' angolo al centro sia per esempio di 80 ovvero di 100 gradi, l' angolo alla circonferenza debba essere di 40 gradi, ovvero di 50. gradi, quindi, poichè di quanti gradi è l' angolo al centro BDC, d' altrettanti è la sua base BC, siccome tutta la base BC misura l' angolo al centro BDC, così la metà dell' istessa base BC misurerà l' angolo alla circonferenza BAC.

PROP XXI. TEOREMA.

Gli angoli costituiti nella medesima porzione del verchio sono eguali fra di loro.

I.

Sia il cerchio ABCDE, e nella medesima porzione AEDC ci siano gli angoli AEC, ADC: io dico; che essi sono eguali fra loro. *FIG. 21.*

II.

*Ritrovisi * il centro F del cerchio ABCDE. Si uniscano le due FA, FC *.* * *pr. 1. di questo.*

III. * *dim. 1.*

Perchè l' angolo al centro AFC; e li due angoli alla circonferenza ABC, ADC hanno la medesima circonferenza ABC per base; sarà * l' angolo AFC doppio, così dell' angolo AEC, come dell' angolo ADC: quindi gli angoli AEC ADC saranno * eguali fra di loro; ciocchè dovea dimostrarsi. * *pr. ant* * *ass. 17.*

PROP. XXII. TEOREMA.

Gli angoli opposti de' quadrilatari descritti ne' cerchi sono eguali a due retti.

I.

Sia il cerchio ABCD, ed in esso il quadrilatero ABCD; io dico, che gli angoli oppo- *FIG. 22.*

sti BAD, BCD, siccome ancora gli angoli ABC, ADC sono eguali a due retti.

II.

* *dim.* 1. *Si uniscano* * *le rette AB BD.*

III.

Perchè gli angoli BAC, BDC sono nella me-
* *pr. ant.* desima porzione BADC, saranno * eguali fra di loro. Similmente, perchè gli angoli CAD, CBD sono nella medesima porzione CBAD,
* *pr. ant.* saranno * ancora eguali fra di loro: quindi, aggiugnendo cose eguali a cose eguali, riu-
* *ass.* 1. scirà * tutto l'angolo BAD eguale a' due angoli BDC, CBD: aggiugnendo dunque il più comunemente, così agli angoli BDC, CBD, come l'angolo BAD il medesimo angolo BGD; saranno due angoli BAD, BCD eguali a' tre angoli BAD BDC eguali a' tre angoli BDC CBD; BCD; ma questi tre angoli BDC, BCD, BCD
* *pr* 32. *l.* sono eguali a due retti *; dunque ancora li due angoli BAD, BCD saranno eguali a' due
* *ass.* 2. retti *. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli angoli ABC ADC siano eguali a' due retti; ciocchè dovea dimostrarsi.

Questa medesima verità si può dimostrare altrimenti così: l'angolo ADC che sta alla circonferenza è misurato dalla metà dell'arco ABC che gli serve di base. Similmente l'angolo ABC è misurato dalla metà dell'arco ADC, che gli serve di base; quindi tutti due gli angoli ADC, ABC saranno misurati dalla metà di tutta la circonferenza ABCD; e per conseguente i detti due angoli conterranno 180. *gradi, che fanno il valore di due angoli.*

Della somiglianza delle Porzioni.

Definizione XI.

Due porzioni si chiamano simili, quando gli angoli nelle suddette due porzioni sono eguali fra di loro.

Spie-

Spiegazione.

*Quindi per assicurarsi, se le porzioni BAC: EDF siano simili, fa duopo tener questa regola. Bisogna formare nelle porzioni BAC, EDF gli angoli BAC, EDF. Ove questi due angoli si ritrovano eguali, le due porzioni saranno simili; ove si ritrovano disuguali, esse saranno dissimili. Ne' qui opponga alcuno potersi in una medesima porzione formare infiniti angoli: poichè tutti questi infiniti angoli debbono per necessità essere eguali * fra di loro.*

*pr. 21. di questo.

Avvertasi quì, che essendo la porzione BAC simile alla porzione EDF: quanti gradi, e parti di gradi sono nella circonferenza BAC: altrettanti se ne conterranno nella circonferenza EDF: imperciocchè supponendosi simili le porzioni BAC EDF; sarà l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; quindi, poichè la metà dell'arco BGC misura l'angolo BAC, siccome la metà dell'arco EHF misura l'angolo EDF: quanti gradi e parti di gradi contiene l'arco DGC, altrettanti ne conterrà l'arco EHF sicchè fingendosi ogni circonferenza compartita in 360. gradi; ne segue che la circonferenza BAC: EDF conterranno un'egual numero de' gradi: dimodochè le porzioni simili si possono definire altrimenti così. Sono quelle, le di cui circonferenze contengono un egual numero di gradi. *Donde poi facilmente si raccoglie* I che due porzioni simili del medesimo cerchio, ovvero di cerchi eguali, sono eguali fra di loro, e II. che due porzioni simili di cerchi disuguali sono ancora disuguali, e che quella porzione è maggiore, la quale si riferisce al cerchio maggiore.

PROP. XXIII. TEOREMA.

Sopra una medesima linea retta non si possono dalla medesima parte costituire due porzioni di cerchio, e disuguali.

I.

FIG. 23. Sia linea retta AB; io dico, che non si possono sopra di essa costituire nella medesima parte due porzioni di cerchi simili, e disuguali.

II.

Se mai è possibile, si costituiscono sopra la linea retta AB le due porzioni di cerchi ACB ADB, le quali siano simili, e disuguali. Prendasi della porzione maggiore il punto D ad arbitrio,

* *lim.* 1. *Si uniscano le rette* * *DCA, DB.*

* *dim.* 1. *Si unisca* * *la CB.*

III.

Perchè si vuole, che la porzione ACB sia simile alla porzione ADB, sarà l'angolo ACB * *defin.* eguale * all'angolo ADB; ma l'Angolo ACB come angolo esteriore del triangolo BDC è maggiore del suddetto angolo ADB; dunque li due angoli ACB, ADB sono nell'istesso tempo eguali, e disugali; ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se le basi di due porzioni di cerchi simili sono eguali, le porzioni medesime saranno parimente eguali.

I.

FIG. 24. Siano le basi AB, CD delle due porzioni di cerchi simili AEB, CFD eguali fra di loro. Io dico, che le medesime porzioni ADB, CFD saranno eguali.

II.

II.

Si accavalli la porzione AEB sulla porzione BFD, in modochè la base AB rimanga distesa sulla base CB e li punti A, e D si uniscano co' punti C, e D. Ciò fatto, o la porzione AEB s'unirà a puntino colla porzione EFD, ed in questo caso esse saranno eguali *. O la porzione AEC caderà al di* ass. 8. dentro, ovvero al di fuori dalla porzione CFD; ed allora sopra la medesima linea retta CD si saranno costituite due porzioni di cerchi simili, e disuguali: ciocchè ripugna alla porzione antecedente.

PROP. XXV. PROLEMA.

Data una porzione di cerchio ritrovarne il centro, poi terminarlo.

I.

Sia datata la porzione del cerchio ABC: fa FIG. 25. duopo ritrovarne prima il centro, e poi compirlo.

II.

*Seghisi * la base AC della porzione data per* pr. 10. l. *mezzo nel punto D.*

*S'innalzi dal punto D * la retta DB perpen-* pr. 11. l. *dicolare base AC.*

*Si unisca * la AB.* * dim. 1.

*Si costituiscano l'angolo ABC eguale * all'* pr. 23. l. *angolo ABD.*

*Si distenda BD fino al punto E **, Io dico;* dim. 2. che il punto E è centro della porzione ABC e che per conseguente per terminare il cerchio non si debba fare altro, se non dal centro A col raggio AE descrivere il di più della circonferenza, che manca.

III.

Siccome dalla costruzione la AD è eguale alla CD; e la DE è comune: così saranno li due la-

ti AD, DE del triangolo ADE, eguali a' due lati CD, DE del triangolo CDE, ciascuno a ciascuno; quindi essendo l'angolo ADE eguale all'angolo CDE; perchè ciascuno di essi è
* pr.4. I. retto; sarà * la base AE eguale alla base CE: in oltre, perchè nel triangolo EBA gli angoli EAB; EBA sopra la basa AB sono
* pr.6.I. eguali dalla costruzione, sarà * AE eguale ad EB, il perchè essendosi dimostrata AE egua-
* ass. 1. le ad EC; saranno * le tre linee rette EA, EB, EC eguali fra di loro. Perlocchè il punto E dal quale cadono alla circonferenza della porzione più di due linee rette eguali
* pr.9 di sarà centro * della suddetta porzione: Ciò
quello. che dovea farsi.

Avvertimento.

Se facendo l' angolo ABE eguale all' angolo ABE, la retta AE si confonde colla base della porzione; ciocchè avviene, allora quando l' altezza BD della porzione è eguale alla metà AD della sua base, la porzione allora sarà un mez-
FIG.1. *zo cerchio, ed il punto D ne sarà il centro* *. *Ma, se la retta AE cade al di sotto della base AC, allora la porzione è minore di un mezzo*
FIG.2. *cerchio, ed il suo centro è fuori* *. *Finalmente se la retta AE cade al di sopra della base AC in tal caso la porzione è maggiore di un mezzo cerchio; ed il centro cade dentro alla suddetta*
FIG.3. *porzione* *.

PROP. XXVI. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali le basi degli angoli eguali così a' centri, come alle circonferenze sono eguali fra di loro.

I.

FIG.26. Siano i due cerchi eguali ABC, DEF. a' centri de' quali ci siano due angoli eguali BGC, EHF, e alle loro circonferenze due altri angoli

li parimente eguali BAC, EDF; dico, che le basi, BC, EF, così degli angoli a' centri, come degli angoli alle circonferenze (nel supposto ch' essi sono eguali), siano eguali fra di loro.

II.

Congiungasi * *le rette BC, BF.* * *dim.* 1.

III.

Perchè i cerchi BAC, EDF sono eguali, saranno parimente i loro semidiametri eguali *. Adunque i due lati BG, GC del triangolo BGC saranno eguali a' due lati EH, HF, del triangolo EHF, ciascuno a ciascuno. Quindi supponendosi l'angolo BGC eguale all'angolo EHF: sarà la base * BC eguale alla base EF. Oltre a ciò, perchè l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF, sarà la porzione BAC simile * alla porzione EDF; il perchè essendosi dimostrate eguali le basi delle suddette porzioni, saranno esse eguali fra di loro *; e per conseguente la circonferenza ABC sarà eguale alla circonferenza EDF; ma tutta la circonferenza è eguale a tutta la circonferenza; dunque l'arco rimanente BC sarà eguale al rimanente arco EF; Ciocchè dovea dimostrarsi.

* *def.* 1. *di questo.*

* *def.* 11. *di questo.*

* *pr.* 2 *di questo.*

Avvertimento.

Questa proposizione è parimente vera, nel supposto, che gli angoli eguali sono centro, ovvero nella circonferenza di un medesimo cerchio, in vece di ritrovarli ne' centri, o nelle circonferenze di due cerchi eguali: di fatto la medesima dimostrazione ha luogo in quest' altro caso: quindi intendendo tutti i quattro angoli retti, che sono intorno il cerchio compartiti in 100. 200 1000. 2000. *ec. angoletti eguali, la circonferenza del detto cerchio rimarrà ancora compartita in* 100. 200. 800. 1000. 2000. *ec. archetti eguali.*

PROP.

PROP. XXVII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali, se le base degli angoli a centri, ovvero degli angoli alle circonferenze sono eguali, gl' istessi angoli saranno ancora eguali.

I

FIG. 27. Ne' cerchi eguali BAC, EDF, siano le basi BC, EF degli angoli a' centri BGC, EHF ovvero degli angoli alle circonferenze BAC, EDF, eguali fra di loro: io dico, che li suddetti angoli BGC, EHF, e BAC, EDF sono eguali fra di loro.

II.

Se mai è possibile, non sia l'angolo BGC eguale all'angolo EHF; ma sia più tosto
*pr.23.1 maggiore di esso. *Facciasi dunque l'angolo BGK* eguale all'angolo EHF.*

III.

Perchè dalla costruzione l'angolo al centro BGK è eguale all'angolo al centro EHF: sa-
* *pr. ant.* rà la base BK eguale * alla base EF: ma la base BC si suppone eguale alla base EF, dunque sarà l'arco minore BK eguale al maggiore BC; ciocchè non potendo sussistere, ne segue, che l'angolo BGC sia eguale all'angolo EHF: quindi essendo l'angolo BGC
*pr.20. doppio * dell'angolo BAC, e l'angolo EHG
di questo doppio dell'angolo EDF sarà parimente l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP XXVIII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali le linee rette eguali segano le circonferenze in due parti tali, che la maggiore riesce eguale alla maggiore, e la minore eguale alla minore.

I. Ne'

I.

Ne' cerchi eguali ABC ; DEF vi siano due linee rette eguali BC , EF , le quali seghino le circonferenze nelle parti BAC , BC , ed EDF , EF ; io dico , che la parte maggiore BAC riesce eguale alla parte maggiore EDF, e che la parte minore BC riesce eguale alla parte minore EF. *FIG.28.*

II.

*Si ritrovino i centri de' due cerchi * , siano G , ed H.* * *pr. 1. di questo.*

*Si uniscano * le rette GB, GC , HE e HF.* * *dim. 1.*

III.

Perchè i cerchi ABC , DEF si suppongono eguali , saranno i semidiametri loro eguali : e perciò li due lati CB , GC del triangolo GBC saranno eguali a' due lati , HE , HF del triangolo HEF , ciascuno a ciascuno . Quindi , essendo dalla supposizione la base BC eguale alla EF : sarà * l'angolo BGC al centro eguale all'angolo al centro EHF : dal che ne segue , che l'arco BC sia eguale * all'arco EF: ma tutta la circonferenza ABC è eguale dalla supposizione a tutta la circonferenza DEF ; dunque la rimanente BAC sarà eguale alla rimanente EDF ; ciocchè dovea dimostrarsi. * *pr. 8. I.* * *pr. 26. di questo.*

PROP. XXIX. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali sotto le eguali circonferenze sono poste le linee rette eguali.

I.

Siano i due cerchi eguali ABC , DEF , e si piglino in essi le circonferenze BAC , BC eguali rispettivamente alle circonferenze EDF, EF ; io dico , che la linea retta BC è eguale alla linea retta EF. *FIG.29.*

II.

*Si trovino * i centri G , ed H de' cerchi ABC DEF.* * *pr. 26. di Si questo.*

* *dim.* 1. *Si uniscano* * *le rette GB, GC, HE, HF*

III.

Perchè i cerchi ABC, DEF sono eguali dalla supposizione; saranno i due lati GB, GC del triangolo GBC eguali a' due lati HE, HF del triangolo HEF, ciascuno a ciascuno quindi, essendo l'angolo al centro BGC eguale all'angolo al centro EHF *; poichè le loro basi, BC, EF si suppongono eguali, sarà la base BC eguale alla base EF; * ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Di un' arco dato farne due parti eguali.

I.

FIG. 30. Sia dato l'arco ABC; fa duopo dividerlo per mezzo.

II.

* *dim.* 1. *Si unisca* * *la retta AC.*

* *pr.* 10. I *Si seghi per mezzo* * *nel punto D.*

Dal punto D sopra la AC s'innalzi la perpendicolare DB *

Si tirino le rette AB, BC. Io dico, che l'arco dato ABC resta diviso per mezzo nel punto B.

III.

Imperciocchè, siccome dalla costruzione la AD è eguale alla CD, e la DB è comune: così saranno i due lati AD, DB del triangolo ADB, eguali a' due lati CD, DB del triangolo CDB ciascuno a ciascuno. Quindi, essendo di più l'angolo ADB eguale all'angolo CDB; per hè ciascuno di essi è retto dalla

* *pr.* 4. I. costruzione, sarà la base * AB eguale alla base BC; ma le linee rette eguali ne' cerchi eguali, e per conseguente nel medesimo cerchio segano

* *pr.* 28. *di questo* le * circonferenze in parti eguali, la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore; dunque sarà l'arco AB eguale all'arco DC: ciocchè dovea farsi.

PROP.

PROP XXXI. TEOREMA.

Nel cerchio, l' angolo, che è nel mezzo cerchio è retto; quello che è nella maggior porzione minore del retto, vale a dire è acuto: quello, che è nella minor porzione è maggiore del retto, vale a dire è ottuso, l' angolo della porzione maggiore è ottuso: l' angolo della porzione minore è acuto.

I.

Sia il cerchio ABCD, il di cui diametro sia BD, ed il centro F, nel quale s' intendano tirate le linee rette BA, AD, AE, ED, AC, CD. Io dico, che l'angolo BAD. il quale è nel mezzo cerchio BAD è retto; e l'angolo ACD, il quale è nella porzione maggiore ABCD è acuto; e che l'angolo AED, il quale è nella porzione minore AED è ottuso Oltre a questo, io dico, che l' angolo della porzione maggiore DAB fatto dalla sottesa AD, e dalla circonferenza AB è maggiore del retto: e che l'angolo della porzione minore DAE fatto similmente dalla sottesa DA, e dalla circonferenza AE è minore del retto. *FIF.* 31.

II.

*Congiungasi * la AF.* * *dim.* 1.
Si distenda la BA verso G.* * *dim.* 2.

III.

I. Perchè F è centro del cerchio ABD, saranno le linee FB, FA, FD cadenti dal centro alla circonferenza eguali fra di loro. Quindi saranno isosceli i due triangoli BFA AFD; e perciò sarà l'angolo FBA eguale * all'angolo FAB; e l'angolo FDA eguale all'angolo FAD. e per conseguente, aggiugnendo cose eguali a cose eguali, saranno i due angoli FBA FDA eguali * all'angolo BAD; ma l' angolo esteriore DAG * è eguale a' suddetti due angoli in. * *pr.* 5. *I.* * *ass.* 2. * *pr.* 23. *I.*

interiori opposti FBA, EDA: dunque sarà pari-
* ass. 1. mente l' angolo BAD eguale * all' angolo DAG. Cadendo dunque la retta DA sopra la retta BG, in modochè gli angoli di quà, e di là: BAD, DAG riescono eguali; sarà la DA perpendi-
*def.10.I. colare alla BG, e perciò l' angolo BAD sarà retto.

II. Nel triangolo BAD, essendo retto l' angolo BAD; sarà l' angolo ABD minore del
*pr.17.I. retto, * vale a dire sarà acuto ma l' angolo
*pr.22.di ACD è eguale all' angolo ABD, perchè
questo. sono nella medesima porzione ABCD; dunque l' angolo ACD sarà parimente acuto.

III. Nel quadrilatero ACDE gli angoli op-
*pr.22.di posti ACD, AED sono eguali * a due retti,
questo. ma l' angolo ACD è acuto: dunque l' angolo AED sarà ottuso.

IV. Essendosi dimostrato l' angolo rettilineo DAB retto, sarà l' angolo mistilineo DAB, il quale abbraccia dentro di se il rettilineo
* ass. 9 ottuso *,

V. Finalmente essendosi dimostrato retto l' angolo esteriore DAG; sarà l' angolo mistilineo DAE, il quale si contiene nell' angolo DAG minore del retto: ciocchè dovea dimostrarsi:

Avvertimento.

Si può la verità di questo Teorema dedurre ancora da ciò, che l' angolo alla circonferenza è misurato dalla metà della sua base. Imperciocchè, quando l' angolo è nel mezzo cerchio, egli ha per base mezza circonferenza, il perchè la sua misura sarà una quarta parte di circonferenza, e per conseguente egli sarà retto. Quando l' angolo è nella porzione maggiore, egli ha per base meno di mezza circonferenza, il perchè la sua misura sarà minore di una quarta parte di circonferenza, e per conseguente egli sarà acuto. Quando l angolo è nella porzione minore, egli ha per base

più

più di mezza circonferenza ; il perchè la sua misura sarà più di una quarta parte di circonferenza , e per conseguente egli sarà ottuso .

PROP XXXII. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio , dal punto del toccamento sia tirata nel cerchio una linea retta secante ; gli angoli , che ella fa colla tangente al suddetto punto del toccamento saranno eguali agli angoli costituiti nelle porzioni alterne del cerchio.

I.

La linea retta CF tocchi il cerchio ABCD; nel punto *A* , *dal quale, tirisi nel suddetto cerchio la segante* AD , che comprenda colla tangente GF i due angoli GAD , FAD ; io dico, che questi due angoli sono eguali agli angoli costituiti nelle porzioni alterne del cerchio : vale a dire *tirate le linee* AE , ED , AB , BD : io dico , che l'angolo GAD sia eguale all'angolo AED ; e che l'angolo GAD sia eguale all'angolo AED , e che l'angolo FAD sia eguale all'angolo ABD. *FIG.* 32.

II.

S'innalzi dal punto A sopra la GF * *la perpendicolare AC ; la quale * passerà per lo centro del cerchio .* * *pr.* 11. I. * *pr.* 19. di questo.

*Si unisca * la CD .* * *dim.* 1.

III.

I. Siccome la retta AC passante per lo centro del cerchio è diametro ; così la porzione CDA sarà mezzo cerchio : e perciò l'angolo CDA nel mezzo cerchio; sarà retto * Quindi, * *pr. ant.* perchè tutti li tre angoli CDA , DAC, ACD del triangolo CDA sono eguali a due retti *, * *pr.* 32. I. saranno li soli due angoli DAC , ACD eguali ad un'angolo retto : vale a dire saranno eguali all'angolo CAF , il quale dalla costruzione è retto: se ne tolga via l'angolo DAC,

il

il quale è comune; rimarrà l'angolo ACD eguale all'angolo EAF: ma l'angolo ACD * *pr.3.di questo.* è eguale all'angolo ABD *, perchè sono nella medesima porzione di cerchio ABCD: dun- * *assi.* 1. que sarà parimente l'angolo DAF eguale * all'angolo ABD.

II. Nel quadrilatero BAED descritto nel cerchio li due angoli opposti ABD, AED *pr.22.di questo.* sono eguali a due retti *; ma gli angoli GAD, FAD ancora sono eguali a due retti *; dun- *pr.13 I.* que saranno li due angoli ABD, AED eguali a due angoli GAD, FAD. Se ne tolgono via gli angoli ABD, FAD, che si sono di * *ass.* 3. mostrati eguali; rimarrà * l'angolo GAD eguale all'angolo AED; ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollario.

Quindi, perchè l'angolo ABD è misurato dalla metà dell'arco AD, sarà ancora l'angolo DAF formato dalla tangente, e dalla segante misurato dalla metà dell'arco AD interposto fra la secante, la tangente: così similmente l'angolo DAF sarà misurato dalla metà dell'arco DBA interposto fra la segante, o la tangente.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Sopra una linea retta data costituire una porzione di cerchi, che contenga un'angolo eguale ad un'angolo dato. FIG. 33.

I.

Sia data la linea retta AB, e sia dato di più l'angolo rettilineo C; fa duopo descrivere sopra la retta data AB una porzione di cerchi, che contenga un'angolo eguale all'angolo dato C.

II.

* *pr.23 I.* *Si faccia l'angolo BRD eguale all'angolo dato C*

Dal

Dal punto A s' innalzi la perpendicolare AH* pr. 11. I°
sopra la AD.
Si tagli la AB per mezzo nel punto F . * pr. 10. I.
Dal punto F s' innalzi la perpendicolare FE so-
sopra la data AB . * pr. 11. I.
Si congiunga la BE, la quale sarà eguale* dim. 1.
alla AE; perchè i due triangoli AFE, BFE avendo i due lati AF, FE eguali a due lati BF FE ciascuno a ciascuno, e l' angolo AFE eguale all' angolo BFE, saranno per la proposizione IV. del primo libro le basi EA, EB eguali fra di loro. Per lo che se dal centro E col raggio EA si descrive un cerchio, egli dovrà passare per lo punto B: io dico, dunque, che la porzione AHB descritta sopra la retta data AB comprende un angolo eguale all' angolo dato C.

III.

Facciasi nella suddetta porzione l' angolo AHB. Perchè dalla costruzione la AD è tirata ad angoli retti dall' estremità del semidiametro AE sopra l' istesso semidiametro. sarà la AD tangente*; quindi essendo la AD tangente, * pr. 16. di
e la AB segante sarà l' angolo DAB formato questo.
dal tangente, e dalla segante eguale * all' an- * pr. 32. di
golo AHB che è nella porzione alterna del questo.
cerchio; ma dalla costruzione l' angolo BAD è eguale all' angolo dato C; dunque sarà ancora * l' angolo AHB contenuto nella porzio- * ass. 1.
ne descritta sopra la retta data AB eguale all' angolo dato C. Ciocchè doveà farsi.

Quì possono accadere tre casi secondo che l' angolo dato è acuto, retto, ovvero ottuso. I. Quando l' angolo è acuto, la linea data AB rimane compresa fra la tangente AD, e la perpendicolare AE quindi la porzione descritta sopra la AB sarà maggiore del mezzo cerchio. II. Quando l' angolo

dato è retto la perpendicolare AE si confonde colla data AB; *e perciò la porzione descritta sopra la AB diventa mezzo cerchio.* III. *Quando l'angolo dato è ottuso la perpendicolare AE cade in mezzo alla tangente AD, e la data AB; di modo che allora la porzione, che si descrive sopra la AB è minore del mezzo cerchio. Tutto questo si accorda assai bene colla proposizione xxxi. nella quale si è dimostrato.* I. Che l'angolo nel mezzo cerchio è retto. II. Che l'angolo nella porzione maggiore è acuto. III. Che l'angolo nella porzione minore è ottuso.

PROP XXXIV. PROBLEMA.

Tagliare da un cerchio dato una porzione, la quale comprenda un'angolo eguale ad un'angolo dato.

I.

FIG.34. Sia dato il cerchio ABC, e sia dato di più l'angolo rettilineo D: fa duopo tagliare dal cerchio dato una porzione, la quale comprenda un angolo eguale all'angolo dato D.

II.

Prendasi nella circonferenza del cerchio dato il punto A ad arbitrio.

* *Cor.* 2. *della pr.* 16. *di questo.* *Si tiri* * *la retta* EAF, *che tocchi il cerchio dato nel punto A.*

* *pr.* 13. *I.* *Si faccia l'angolo EAC eguale all'angolo dato* D *. Io dico, che la porzione ABC tagliata dalla retta AC sia quella, che si cerca: vale a dire, fatto l'angolo ABC nella suddetta porzione: io dico, che esso sia eguale all'angolo dato D.

III.

Imperciocchè, essendo EAF dalla costruzione tangente del cerchio, ed AC segante: sarà l'angolo EAC formato dalla tangente e dalla segante eguale all'angolo ADC forma-

to nella porzione alterna del cerchio: * ma* l'angolo EAC è eguale dalla costruzione all'angolo dato D: dunque sarà parimente l'ABC eguale all'angolo dato D: ciocchè dovea farsi. *pr. 32. di questo*

PROP. XXXV. TEOREMA.

Se due linee rette si segano dentro ad un cerchio, sarà il rettangolo formato dalle parti dell'una eguale al rettangolo formato dalle parti dell'altra.

Seghinsi le due line dirette AC, BD tirate nel cerchio ABCD nel punto E; io dico, che il rettangolo AEC formato dalle parti AE, EC della retta AC sia eguale al rettangolo BED formato dalle parti BE, ED della retta BD. FIG. 25. B

II.

Siccome può accadere, che le due linee AC BD passino entrambe per lo centro.

Che una passi per lo centro, e l'altra no.

Che nè l'una nè l'altra passi per lo centro: così io distinguo per maggior chiarezza la proposizione in tre casi.

III.

Supponendo che ciascuna delle due linee AC BD passi per lo centro E, che è il punto della loro intersezione, rimarrà ciascuna di esse segata per mezzo dal medesimo centro E: quindi il rettangolo AEC sarà eguale al quadrato di AE, siccome il rettangolo BED degenererà nel quadrato di BE. Ma il quadrato di AE è eguale al quadrato di BE, perchè le linee EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali fra di loro. dunque sarà parimente il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED.

II. Supponendo poi, che la linea AC passi per lo centro F, e la linea BD non passi per lo

* *dim.* 1. centro. *Si unisca in* FB *; e mettiamo primieramente, che la retta* BD *resti divisa per*
* *prop.* 3. *mezzo, e per conseguente ad angoli retti* * *dal-*
di questo-la AC *passante per lo centro.* Siccome la retta AC è divisa per mezzo nel punto F, ed è divisa inegualmente nel punto E, così sa-
* *pr.* 29. rà * il rettangolo AEC insieme col quadrato
II. FIG. di FE eguale al quadrato di FG, ovvero al
35. C. quadrato di FB: ma essendo il triangolo FEB rettangolo in E, il quadrato dell' ipotenusa
* *pr.* 47. EB * è eguale a' quadrati de' lati FE, EB; dunque sarà parimente il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE eguale a' due quadrati di FE, e di EB: se ne tolga via il quadrato di FE, il quale è comune, rimar-
* *ass.* 3. rà * il rettangolo AEC eguale al quadrato di BE. Quindi essendo il quadrato di BE eguale al rettangolo BED, perchè la BD si suppone divisa per mezzo nel punto E: sarà ancora il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED.
FIG. 35. D. Mettiamo in secondo luogo, che la BD non resti divisa per mezzo, e per conseguente nemmeno ad angoli retti dalla *AC*. *Dal punto F si lasci cadere sopra la BD la per-*
* *pr.* 12. *I. pendicolare FG* *: *la quale passando per lo centro F, e dividendo la retta BD, che non passa per*
* *pr.* 3. *di lo centro ad angoli retti, dividerà per mezzo* *.
questo. Siccome la retta AC è divisa per mezzo nel punto F, ed è divisa in parti disuguali nel
* *pr.* 5. II. punto E; così sarà * il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE eguale al quadrato di FC, ovvero di FB; quindi essendo a cagione dell' angolo retto G il quadrato di FE
* *pr.* 47. I. eguale a' quadrati di FG, GE *; e il quadrato di FB eguale a' quadrati di FG, GB; sarà il rettangolo AEC insieme co' quadrati di FG, GE eguale a' quadrati di FG, GB, se ne tolga via il quadrato di FC, il qua-
* *ass.* 3. le è comune, e rimarrà * il rettangolo ACE

insieme col quadrato di GE eguale al quadrato di GB. In oltre perchè la retta BD è divisa per mezzo nel punto G, e disugualmente nel punto E sarà * il rettangolo BED insieme col quadrato di EG eguale al quadrato di GB: ma il rettangolo AEC insieme col quadrato di GE è eguale al medesimo quadrato di GB; dunque sarà * il rettangolo AEC insieme col quadrato di EG eguale al rettangolo BED insieme col medesimo quadrato di EG: di modo che togliendone il quadrato di GE, il quale è comune, rimarrà il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED. * pr. 5. II. * ass. 1.

III. Supponendo in fine, che le due rette AE, BD si seghino fuori del centro F: *Si unisca la retta EF* *, *quale si distenda dall' una parte, e dall' altra fino a' punti* G, *ed* H *. FIG. 35. * dim. 1. * dim. 2.

Quindi poichè la retta GH passante per lo centro divide nel punto E le rette AC, CD, che non passano per lo centro, sarà per lo caso ora dimostrato, il rettangolo GEH eguale così al rettangolo AEC, come al rettangolo BED: il perchè i due rettangoli AEC, BED saranno eguali fra di loro; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXXVI TEOREMA.

Se da un punto preso fuor di un cerchio cadano nel cerchio due linee rette, una delle quali lo tocchi, e l'altra lo seghi; il rettangolo formato da tutta la linea segante, e da quella parte di essa, che resta compresa fra il punto, e la circonferenza convessa, sarà eguale al quadrato della tangente.

Dal punto A preso fuori del cerchio BCD cadano nel detto cerchio due linee ABC, AD, la prima delle quali lo seghi ne' punti B, e C, e l'altra lo tocchi nel punto D: io dico, che il rettangolo CAB formato da tutta la FIG. 36.

segante CA, e dalla parte AB di essa; che resta compresa fra il punto A, e la circonferenza convessa sia eguale al quadrato della tangente AD. II.

Siccome può accadere: I Che la segante ABC passi per lo centro E: II. che la detta segante non passi per lo centro; così per maggior chiarezza io divido il Teorema in due casi.

I. Passi la segante ABC primieramente per lo centro E. *Si unisca la* ED: siccome la BC è segata per mezzo nel punto E, e da essa è stata aggiunta per diritto la BA; così sarà * il rettangolo CAB, insieme col quadrato di BE eguale al quadrato di AE; ma il quadrato di AE * è eguale a' quadrati di AD, e di DE; perchè l'angolo AED è retto, come quello, che è formato dalla tangente DA, e dal semidiametro DE *; dunque sarà parimente il rettangolo CAB: insieme col quadrato di BE eguale a' quadrati di AD, di DE: se ne tolgano i quadrati di BE, e di DE, che sono eguali fra di loro, perchè le linee BE, DE cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali; rimarrà * il rettangolo CAB eguale al quadrato di AD.

* *pr.* 6. II.
* *pr.* 47. I.
* *pr.* 8. *di questo.*
* *ass.* 3.

II. Passi in secondo luogo la segante ABC di là del centro F. *Si faccia sopra essa cadere la perpendicolare EF; Si uniscano le rette* EB, EA, ED * E perchè la retta FE passante per lo centro, E divide la retta BC, che non passa per lo centro ad angoli retti nel punto F, la dividerà * per mezzo: e per *questo* conseguente sarà * il rettangolo CA, insieme col quadrato di BF eguale al quadrato di AF: aggiugnendo dunque comunemente il quadrato di FE, sarà il rettangolo CAB, insieme co' due quadrati di BF, e di FE eguale

* *pr.* 12. I.
* *dim.* 1.
* *pr.* 3. *di questo*
* *pr.* 6. II

a' due

a' due quadrati di AF, e di FE: quindi, essendo a cagione dell'angolo retto in F, il quadrato di BE eguale * a' quadrati di BF, e' di FE; ed il quadrato di AE eguale a' quadrati di AF, e di FE: sarà il rettangolo CAB, insieme col quadrato di BE eguale al quadrato di AE: ma il quadrato dell'ipotenusa AE è eguale a' quadrati di AD, e di DE, perchè* l'angolo ADE formato dalla tangente AD, e dal semidiametro DE è retto *: dunque sarà* ancora il rettangolo CAB, insieme col quadrato di BE eguale a' quadrati di AD, e di DE; se ne tolgano i quadrati de' raggi BE, DE, che sono eguali fra di loro: rimarrà il rettangolo CAB eguale al quadrato di AD; ciocchè dovea dimostrarsi.

pr.47.I.

pr.47.I.

pr. 18. di questo

Corollario.

Se dal punto A s'intende tirata un' altra segante AGH, sarà similmente il rettangolo HAG eguale al quadrato dalla tangente AD; quindi i rettangoli CAB, HAG saranno eguali fra di loro: ciocchè dà luogo al Teorema seguente. Se due linee HG, CB si segano fuori del cerchio nel punto A, il rettangolo fatto dalle parti HA, AG dell'una, è eguale al rettangolo fatto dalle parti CA, AB dell'altra.

PROP. XXXVII. TEOREMA.

Se da un punto preso fuori di un cerchio cadano al detto cerchio due linee, una delle quali lo seghi, e l'altra gli stia accanto: e sia il rettangolo formato da tutta la segante, e da quella parte di essa, che è fuori del cerchio eguale al quadrato di quella, che gli sta accanto, essa sarà tangente.

Dal punto A preso fuori del cerchio EBD s'intendano tirate due linee ABC, AD, la prima delle quali lo seghi ne' punti B, e C, e l'al-

FIG. 37.

e l' altra gli stia accanto senza sapersi, se lo seghi, o se lo tocchi; e sia il quadrato di AD eguale al rettangolo CAB: io dico, che la AD è tangente.

II.

Si ritrovi il centro F del cerchio EBD.

pr. 17. di questo. *Si tiri dal punto A la tangente AE* *.

Si uniscano le rette FD, FA, EF *.

* *dim.* I.

III.

Siccome la AE è tangente dalla costruzione, e la AC è segante: così sarà * il rettangolo CAB eguale al quadrato di AE: ma il quadrato di AD è eguale all' istesso rettangolo CAB: dunque sarà il quadrato di AE eguale * al quadrato di AD; e per conseguente le rette AE, AD, saranno eguali fra di loro: Quindi due triangoli AEF, ADF, avendo i due lati AE, EF eguali a' due lati AD, DF, e la base AF comune: avranno * l'angolo AEF eguale all' angolo ADF: ma l'angolo AEF formato dalla tangente AE; e dal raggio EF è retto *: dunque l'angolo ADF sarà parimente retto, e perciò la DA insistendo ad angoli retti all' estremità D del raggio DF sarà tangente: * ciocchè dovea dimostrarsi.

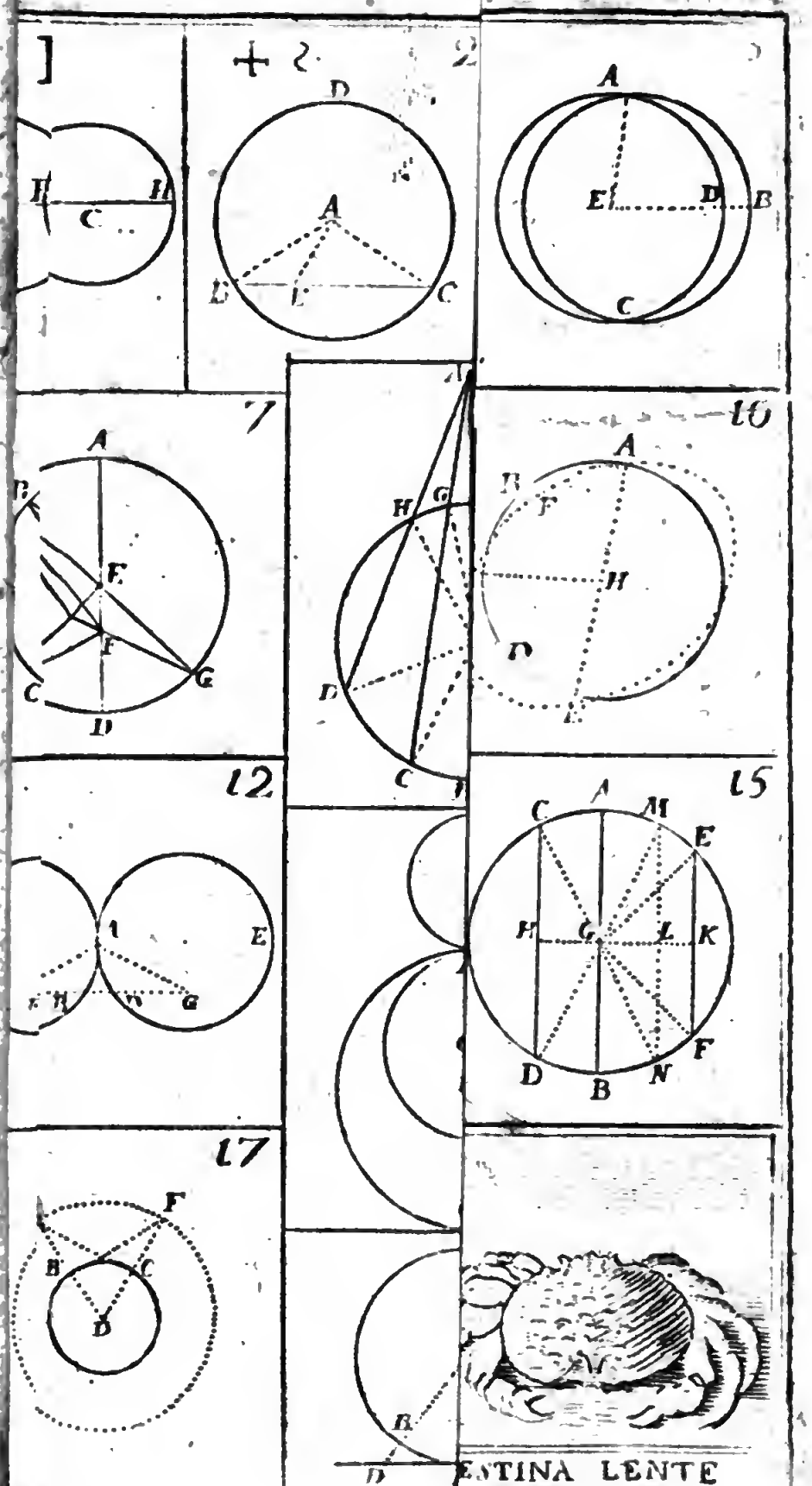
* *pr. ant.*

* *ass.* I.

* *pr.* 8. I.

* *pr.* 18. *di questo.*

* *pr.* 16. *di questo.*


]
H
C
H
+ 2.
D
A
B
E
C
2
A
E
D
B
C
7
A
B
F
E
G
C
D
H
G
D
C
10
A
B
F
H
D
E
12
A
E
H
G
15
C
A
M
E
H
G
L
K
D
B
N
F
17
F
B
C
D
B
D
ESTINA LENTE

LIBRO QUARTO

Definizioni.

I.

Una figura rettilinea si dice essere descritta in un'altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura descritta tocca ciascun lato di quella figura, nella quale essa è stata descritta.

II.

Viceversa una figura rettilinea si dice esser descritta intorno ad un' altra figura rettilinea, quando ciascuno lato della figura descritta tocca ciascun angolo di quella, intorno la quale essa è descritta.

III.

Una figura rettilinea si dice essere descritta in un cerchio, quando ciascun angolo della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio:

IV.

Viceversa una figura rettilinea si dice esser descritta intorno ad un cerchio, quando ciascun lato della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio.

V.

Un cerchio si dice esser descritto in una figura rettilinea, quando la di lui circonferenza tocca ciascun lato della figura, nella quale egli è descritto.

VI.

Viceversa, un cerchio si dice esser descritto intorno ad una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun angolo della figura, intorno alla quale egli è descritto.

VII.

Una linea retta si dice adattata in un cerchio, quan-

quando le di lei estremità arrivano sino alla circonferenza del cerchio.

PROP. I. PROBLEMA.

In un cerchio dato adattare una linea retta eguale ad un' altra linea retta data.

I.

FIG. 1. Sia dato il cerchio ACB; e sia dato inoltre la linea retta DE; fa duopo nel cerchio dato adattare una linea retta eguale alla detta DE.

II.

* pr. 1. III. *Si tiri* * *il diametro AB.*

* pr. 3. I. *Si tagli AF eguale alla data DE* *.

Dal centro A, col raggio AF descrivasi il circolo ECG *.

* dim. 3. *Si unisca la* AC *: io dico, che questa linea

* dim. 3. retta AC adattata nel cerchio dato sia eguale alla data DE.

III.

Siccome A dalla costruzione è centro del cerchio FCG, così le linee AF, AC cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro: ma dalla costruzione la AF è eguale alla DE: dunque sarà parimente la AC

* ass. 1. eguale * alla DE. Ciocchè doveva farsi.

Avvertimento.

Siccome di tutte le linee rette tirate nel cerchio,

* pr. 15. III. *il diametro è la massima* *: *così, acciò possa risolversi questo problema si richiede, che la linea retta data DE non sia maggiore del diametro AB: imperciocchè, se fosse maggiore del suddetto diametro, sarebbe impossbile adattarla nel dato cerchio. Se poi la data DE eguagliasse il diametro del cerchio, il medesimo diametro soddisferebbe alla quistione.*

PROP.

PROP II. PROBLEMA.

In un cerchio dato descrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

I.

Sia dato il cerchio ACB, e sia dato in oltre il triangolo DFE: fa duopo descrivere nel cerchio dato un triangolo equiangolo al triangolo dato DFE: vale a dire, tale, che ciascuno de' suoi tre angoli sia eguale, a ciascuno de' tre angoli del triangolo DFE. *FIG.2.*

II.

Prendasi nella circonferenza del cerchio dato il punto A ad arbitrio.

Si tiri la tangente GAH * *Cor. 1. della pr. 16. III.*

Si costituiscano al punto A gli angoli CAC, HAB eguali rispettivamente agli angoli DEF. DFE *, * *pr. 23. I.*

Si congiunga la CB *: io dico, che il triangolo ACB descritto nel cerchio dato sia equiangolo al triangolo dato DFE. * *dim. 1.*

III.

Siccome dalla costruzione la retta GAH tocca il cerchio nel punto A, ed AC lo sega nell'istesso punto A, così sarà l'angolo GAC formato dalla tangente, e dalla segante eguale all'angolo ABC costituito nella porzione alterna del cerchio *; ma dalla costruzione l'angolo GAC è eguale all'angolo DEF; dunque sarà parimente l'angolo ABC eguale all'angolo DEF *. Similmente l'angolo HAB formato dalla tangente e dalla segante sarà eguale * all'angolo ACB costituito nella porzione alterna del cerchio; quindi, essendo dalla costruzione l'angolo HAB eguale all'angolo DFE sarà parimente l'angolo ACB eguale * all'angolo DFE. Finalmente, perchè tanto i tre angoli del triango- * *pr. 32. III* * *ass. 1.* * *pr. 32. III.* * *ass. 1.*

lo

lo ACB, quanto i tre angoli del triangolo
* pr. 32. I. DFE sono eguali a due retti * saranno li tre angoli del triangolo ACB eguali a' tre del triangolo DFE: quindi, essendosi già dimostrati i due angoli in C, ed in B eguali ai due in F, ed in E, sarà il terzo in A eguale al terzo in D, ciocchè dovea farsi.

PROP. III. PROBLEMA.

Intorno ad un dato cerchio descrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

I.

FIG. 3. Sia dato il cerchio ABC, e sia dato inoltre il triangolo DEF: fa duopo descrivere intorno al cerchio dato ABC un triangolo equiangolo al triangolo dato DEF.

II.

* dim. 1. *Si distenda * il lato EF del triangolo DEF verso G, e verso H.*

* pr. 1. III. *Si tiri il raggio KA * ad arbitrio.*

Si costituiscono gli angoli AKC, AKB eguali rispettivamente agli angoli esteriori DEG,
* pr. 23. I. *EFH *.*

Da' punti A, C, e B s'innalzino sopra i rag-
pr. 11 I. *gi AK, CK, BK le perpendicolari * MAL, LCM, NBM, le quali costituiscano il triangolo NML*: io dico, che questo triangolo sia quello, che si dimanda.

III.

Imperciocchè, primieramente il triangolo NML è destritto intorno al cerchio dato ABC: perchè i suoi lati NM, ML, LN toccano il detto cerchio; per essere essi perpendicolari a' semidiametri BK, AK, KC *:
* pr. 16. III. che poi il medesimo triangolo NML sia equiangolo al triangolo DEF, si dimostra così. I quattro angoli della figura quadrilatera ALCK sono eguali a quattro retti: poi-

chè

chè intendendo tirato il diametro KL. rimane essa compartita in due triangoli, ciascuno de' quali ha i suoi tre angoli eguali a due retti *: ma dalla costruzione gli angoli KAL, KCL sono retti entrambi: dunque gli altri due angoli AKC, ALC sono eguali a due retti: il perchè, essendo parimente gli angoli DEF, DEG eguali a due retti *, saranno i due angoli DEF, DEG, eguali a' due angoli AKC, ALC; ma dalla costruzione l'angolo AKC è eguale all'angolo DEG: dunque l'angolo rimanente ALC sarà eguale all'angolo rimanente DEF. Nell'istessa maniera comparando i due angoli AKB, AMB co' due angoli, DFH DFE, si dimosterà, che l'angolo AMB sia eguale all'angolo DFE: quindi essendo tutt'i tre angoli del triangolo NML eguali a tutti tre gli angoli del triangolo DEF, ed essendosi di più dimostrati gli angoli in M, ed L eguali agli angoli in F, ed E: sarà l'angolo rimanente in N eguale all'angolo rimanente in D. Ciocchè dovea farsi.

* *pr.* 32. I.

* *pr.* 13. I.

PROP. IV. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un triangolo dato.

I.

Sia dato il rettangolo ABC: fa duopo descrivere dentro di esso un cerchio. *FIG.* 4.

II.

*Seghinsi gli angoli ABC; BCA per mezzo * colle linee rette BD, CD, le quali concorrono insieme nel punto D.* * *pr.* 9.

*Dal punto D si facciano cadere * le perpendicolari DE, DF, DG; sopra i tre lati AB, BC, CA del triangolo dato.* * *pr.* 12. I.

Perchè dalla costruzione l'angolo FBE è segato per mezzo colla retta BD, e di più del-

della medesima costruzione le rette DF, DE rono perpendicolari sopra i latì BC, BA, del triangolo dato ABC, i due triangoli DBF, DBE avranno i due angoli DBF, DFB eguali a' due angoli DBE, DEB ciascuno a ciascuno: quindi i medesimi triangoli, avendo
* pr. 26. I. in oltra il lato DB comune, avranno * il lato DF eguale al lato *DE*; nell' istessa maniera paragonando il triangolo DFC col triangolo DGC; si dimostrerà, che DF sia eguale a DG; quindi le tre linee rette DE, DF DG saranno eguali fra di loro: e perciò il cerchio descritto dal centro D, e col raggio DE passerà per gli punti F, e G; ma io dico di più, che egli sarà toccato da' lati AB, EC, CA ne' punti E, F, e G imperciocchè le linee DE, DF, DG sono semidiametri del cerchio, e le rette AB, BC, CA sono perpendicolari a' suddetti semidiametri: perciò dovranno per la prop. 16 del terzo libro toccare il cerchio ne' punti E, F, e G; cioc-chè dovea farsi.

PROP. V. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un triangolo dato.

I.

FIG 5. Sia dato il triangolo ABC, fa d' uopo intorno ad esso descrivere un cerchio.

Seghinsi i lati AB, AC per menzo pr. 10 I. * *ne' punti D, ed E.*

S' innalzino da' punti D, ed E le perpendi-
* pr. 11. I. *colari, DF, EF sopra i suddetti lati AB, AC, le quali concorrano nel punto F.*

Si congiungano dim. 1. * *le rette AF, BF, CF.*

II.

Siccome dalla costruzione la AD è eguale alla BD, e la DF è comune: così saranno i due lati, AD, DF del triangolo ADF eguali a

due

due lati BD, DF del triangolo BDF: ciascuno a ciascuno: sicchè, essendo ancora l'angolo ADF eguale all'angolo BDF, perchè l'uno, e l'altro dalla costruzione è retto, sarà * la base AF eguale alla base BF. Nell'istessa maniera comparando i due triangoli, AFE, CFE insieme, si dimostrerà, che AF sia eguale a CF, quindi, le tre rette AF, BF, CF saranno eguali fra di loro e perciò il cerchio descritto dal centro F, e col raggio FA passerà per gli punti B, e C, e per conseguente sarà descritto intorno al triangolo dato ABC. *pr. 4. I.

Avvertimento.

Avverti quì, che se l'angolo BAC è acuto il centro F cade dentro al triangolo dato ABC. Se è retto cade sulla base BC dell'istesso triangolo, ma se è ottuso cade sotto la base BC, e per conseguente fuori del triangolo ABC. Avvertasi inoltre, che col mezzo della costruzione di questa proposizione si può sempre descrivere un cerchio, che passi per tre punti dati, A, B, C, purchè però i tre punti dati non si trovino in una linea retta: vale a dire, purchè congiungendo i suddetti tre punti con tre linee rette, si venga a formare un triangolo FIG. P.

PROP. VI. PROBLEMA.

Descrivere in un quadrato un cerchio dato.

I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descrivere dentro di esso un quadrato. FIG. 6.

II.

Si tirino i due diametri AC, BD, i quali si seghino ad angoli retti nel centro E

*Si congiungano * le rette AB, BC, CD, DA.* dim. 1.

III.

III.

Perchè i due lati BE, AE del triangolo BEA sono eguali a' due lati DE, EA del triangolo DEA ciascuno a ciascuno, e l'angolo BEA è eguale all'angolo DEA, sarà la base BA eguale * alla base DA. Nell'istessa maniera per mezzo de' rettangoli DFA, BEC si dimostra, che la DA sia eguale alla DC, e poi per mezzo de' triangoli DEC, CEB: che la CD sia eguale alla BD: quindi i quattro lati AB, BC, CD, DA della figura quadrilatera ABCD saranno eguali fra di loro. Inoltre perchè BD è diametro, sarà BAD un semicerchio, e BCD un altro semicerchio; e per conseguente gli angoli BAD, BCD ne' semicerchi saranno retti *. Similmente essendo AC diametro, sarà ABC un semicerchio, ed ADC sarà un altro semicerchio; di modochè gli angoli ABC, ADC ne' semicerchi saranno retti; quindi tutt' i quattro angoli della suddetta figura quadrilaterà ABCD saranno retti, e perciò essa sarà un quadrato; ciocchè dovea dimostrarsi.

*pr. 4. I.

* pr. 3. I. III.

PROP. XVII. PROBLEMA.

Descrivere un quadrato intorno ad un cerchio dato

I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descrivere intorno ad essa un quadrato.

II.

Si tirino i due diamestri AC, BD, i quali si seghino ad angoli retti nel centro E.

Per gli punti A, B, C, D, si tirino le tangenti FG, GG, *IH* *. Io dico, che la figura quadrilatera FGHI sia il quadrato, che si cerca.

* pr. 16. III.

III.

Perchè dalla costruzione la FG tocca il cerchio

chio ABCD nel punto A, e dal centro E al punto A del toccamento si è tirata la retta EA; gli angoli, che sono al detto punto A saranno retti * Nell' istessa maniera si dimostrerà, che gli angoli, che sono ne' punti B, C, e D siano tutti retti. Quindi, perchè dalla costruzione l'angolo AED è retto, ed è retto similmente l'angolo FDE, saranno li due angoli interioti AED, FDE eguali a due retti; e per conseguente le linee rette FI, AC saranno parallele: per la medesima ragione sarà la AC parallela alla GH, e la DB parallela, così alla FG, come alla IH: e perciò le cinque figure FIHG, FDBG, DHIB, FICA, ACHG saranno tutte parallelogrammi di modo che sarà la AC eguale a ciascuna delle due FI, GH, e la DB eguale a ciascuna delle due FG, IH; ma AC, DB sono eguali fra di loro, perchè sono diametri del cerchio ABCD; dunque le quattro linee FG, GH; HI, IF saranno tutte eguali: e perciò il parallelogrammo FGIH descritto intorno al cerchio dato è equilatero: Che poi sia rettangolo ancora, si dimostra così; Perchè FDBG è parallelogrammo, e l'angolo GBD è retto, l'angolo opposto GFD sarà parimente retto *: quindi tutti gli altri tre angoli del parallelogrammo FHGI saranno ancora retti *, e perciò il parallelogrammo FHIG sarà un quadrato. Ciocchè dovea farsi.

* *pr.* 18. III.

* *pr.* 34. I.

* *Cor.* 1. *della pr.* 46. I.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un quadrato dato.

I.

Sia dato il quadrato AFCD; fa duopo descrivere dentro di esso un cerchio. *FIG.* 8.

Seghinsi * *i lati AB, AD per mezzo ne' punti D, ed H.*

* *pr.* 10. I.

* pr. 31. I. *Per lo punto E si tiri* * *la EG parallela a ciascuna delle due* AD, AC.

* pr. 31. I. *Simile per lo punto H si tiri* * *la HF parallela a ciascuna delle due AB, DC.*

Siccome dalla costruzione la retta HF è parallela alle due AB, DC, e la EG, è parallela alle due AD, BC, così il quadrato ADBC rimane compartito dalle due linee HF, EG
* pr. 34. I. in quattro parallelogrammi, quindi sarà * la AE eguale alla HI, e la AH sarà eguale alla
* ass. 7. EI: ma la AE è eguale alla AH *, perchè le rette AB, AD, le quali sono doppie della AE, AH sono eguali fra di loro; dunque sarà ancora EI eguale alla IH; così similmente si dimostra, che la EI sia eguale alla FI, e che la FI sia eguale alla GI: di modo che le quattro rette HI, EI, FI, GI saranno eguali fra di loro; perlocchè il cerchio descritto dal centro I, col raggio IH dovrà passare per li punti
* pr. 16. IIIE, F, e G, e toccherà le linee AD, AB, BC, CD *; perchè gli angoli in H, in E, in F, e G sono retti dalla costruzione; essendosi tirate le rette HF; EG parallele rispettivamente a' lati AB, BC del quadrato. Ciocchè dovea farsi.

PROP. XI. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un quadrato dato.

I.

veggasi la figura 6. Sia dato * il quadrato ABCD; fa duopo intorno ad esso descrivere un cerchio.

* dim. 1. II.

Congiungansi * *le diagonali AC, BD.*

III.

Siccome la AB è eguale alla AD, e la AC è comune; così saranno i due lati DA, AC, del triangolo BAC eguali a' due lati DA, AC del trian-

triangolo DAC, ciascuno a ciascuno; quindi essendo la base BC eguale alla base DC, sarà* l'angolo BAC eguale all'angolo DAC, e per conseguente l'angolo retto BAD sarà segato per mezzo del diametro AC. Similmente si mostrerà, che ciascuno de' tre angoli retti ABC, BCD; CDA resti diviso per mezzo del diametro BD, e dal diametro CA: il perchè gli otto angoli due in A, due in B, due in C, e due in D saranno retti eguali fra di loro. Ora i quattro triangoli EAB, EBC, ECD, EDA, avendo gli angoli sopra le basi AB, BC, CD, DA eguali fra di loro, saranno isosceli*; e perciò le quattro rette EA, EB, EC, ED saranno eguali; di modo che il cerchio descritto dal centro E, e col raggio EA passerà necessariamente per li punti B, C, e D, e sarà descritto intorno il quadrato dato ABCD; ciocchè dovea farsi. *pr 8. I. *pr.6.I.

PROP. X. PROBLEMA.

Descrivere un triangolo isoscele, che abbia amendue gli angoli, che sono alla base doppj del rimanente angolo, il quale è nel vertice.

I.

Quì non si dà cosa alcuna: si cerca solamente di descrivere un triangolo isoscele ABD, tale, che ciascuno degli angoli ABD, ABC, che sono alla base sia doppio dell'angolo BAD, il quale è nel vertice. FIG.10.

II.

Si prende la retta AB ad arbitrio.

Seghisi in tal modo nel punto C, che il rettangolo formato da tutta la AB, e dalla parte minore AC sia eguale al quadrato della maggiore AC.* *pr.11. I

Dal centro A col raggio AB descrivasi il cerchio EDF.* *dim.3.I.

Si adatti in questo cerchio così descritto la
pr.1. di questo. *retta* BD *eguale* * *alla AC.*

Si congiunga la retta AD *: Io dico, che il*
* *dim.1.* *triangolo isoscele* ABD *sia quello, che si cerca.*

III.

Per dimostrarlo, s' intenda intorno il triango-
pr.5. di questo. lo ACD descritto in cerchio ACD * perchè dalla costruzione la BD è eguale alla AC: siccome dall' istessa costruzione il quadrato della AC è eguale al rettangolo ABC, così sarà parimente il quadrato della BD eguale al rettangolo ABC: quindi la BA, secondo il cerchio ne' punti C ed al BD stando accanto all'istesso cerchio, ed essendosi dimostrato che il quadrato della BC sia eguale al rettangolo ABC; la BD toccherà il
pr. 37. III. cerchio nel punto D *. Ora, essendo BD tangente, e CD segante, sarà l'angolo BDC formato dalla tangente, e dalla segante, eguale *
pr. 32. III. all' angolo CAD costituito nella porzione alter-
* *ass. 2.* na del cerchio; e perciò aggiunto commemente l'angolo CDA, sarà tutto l' angolo ADB eguale a due angoli CAD, CDA: ma questi due angoli CAD, CDA sono eguali all' angolo esteriore
pr.32. I. DCB *, dunque l'angolo esteriore DCB sarà eguale ancora all' angolo ADB, ovvero all'an-
pr.5. I. golo ABD, il quale è eguale all'angolo ADB*, perchè il triangolo ABD è isoscele. Quindi essendo gli angoli DCB, DBC, sopra la base BC del triangolo DC eguali fra di loro, e tanto i lati DC, DB ad essi sottoposti parimente
pr 6. I. eguali *; ma dalla costruzione la AC è eguale a
ass. 1. BD; dunque sarà * la AC eguale parimente a DC; e per conseguente il triangolo ACD sarà isoscele, e l'angolo CAD sarà eguale all' angolo CDA *: ma si è dimostrato l'angolo CDB parimente eguale all'angolo CAD, dunque tutto l'angolo ADB sarà doppio dell'angolo CAD, ovvero

dell'

dell' angolo BAD; e perciò ancora l' angolo ABD sarà doppio dell' angolo BAD; ciocchè dovea farsi.

Addizione.

Per sapere il valore di ciascuno de' tre angoli ABD, ADB BAD, si potrà far così; ciascuno delli angoli ABD, ADB è doppio dell' angolo BAD: dunque tutti due insieme sono quadrupli dell' angolo ABD, e tutti due insieme giuntovi l' angolo BAD, vale a dire li tre angoli del triangolo ABD saranno quadcupli dell' istesso angolo BAD; ma tutti tre gli angoli del triangolo AED sono eguali a due retti, ovvero a 180 gradi: dunque il solo angolo BAD sarà eguale alla quinta parte di 180 gradi, il perchè essendo 36 la quinta parte di 180; ne segue che l' angolo EAD sia di 36 gradi, gli altri due ABD, ADB, saranno ciascuno di 72 gradi, e rimane la somma di tutti tre 36, 72, e 72 eguale a 180 gradi.

Per mezzo di questo Problema Euclide *nella proposizione, che segue descrive in un cerchio dato un pentagono equilatero, ed equiangolo, vale a dire una figura di cinque lati equilatera, ed equiangola, la regola è questa. Siccome tutta la circonferenza contiene 360 gradi, così ogni quinta parte di essa ne conterrà 72: quanti appunto ne contiene ciascuno degli angoli alla base del triangolo isoscele ABD. Costituiscasi dunque al centro del cerchio dato un angolo di 72 gradi, vale a dire un' angolo eguale all' angolo ABD, poichè le base di esso sarà la quinta parte della circonferenza, e per conseguente la sottesa di questa base sarà uno de' lati del pentagono, che si dimanda.*

PROP. XI. PROBLEMA.

Descrivere in un cerchio dato un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descri- *FIG. 5.*

vere dentro di esso un pentagono equilatero, ed equiangolo.

I.

Si descriva in disparte il triangolo isoscele EFG, tale, che ciascuno de' due angoli FGH, FHG sopra la base sia doppio dell'
* *pr. ant.* *angolo al vertice CFH**
Nel cerchio dato si descriva il triangolo ACD
* *pr. 2. di questo* *equiangolo al triangolo FGH*
Ciascuno de' due angoli ACD, ADC si seghi
* *pr. 9. I.* *per mezzo colle rette CE, CB*
* *dim. 1.* *Si congiungano le rette AB, BC, AE, ED**:
Io dico, che il pentagono ABCDE descritto nel cerchio dato sia equilatero, ed equiangolo.

III.

Perchè dalla costruzione il triangolo ACD è equiangolo al triangolo FGH, siccome gli angoli FGH, FHG sono doppj dell' angolo GFH così gli angoli ACB, ADC saranno doppi dell' angolo CAB: il perchè essendo dalla costruzione l'angolo CAD segato per mezzo dalla retta CE, e l'angolo ADC similmente essendo segato per mezzo della retta DB, sasanno i cinque angoli alla circonferenza CAD; CDB, BDA, ADE, ECD eguali fra di loro: ma le basi degli angoli eguali, che stanno alla circonfe-
**pr. 26. III* renzi sono eguali fra di loro*; dunque saranno i cinque archi DC, CB, BA, AE, ED eguali
**pr. 29. III* fra di loro, e per conseguente le loro corde*, ovvero sottese DC, CB, BA, AE, ED saranno parimente eguali: laonde il pentagono descritto sarà equilatero: che sia po equiangolo; si dimostra così; l'arco BC è eguale all'arco AE; aggiugnendo dunque comunemente l'arco CDE, sarà la circonferenza BCDE eguale alla circonferenza CDEA: ma la circonferenza BCDE è

base

base dell'angolo BAE, e la circonferenza CDEA è base dell'angolo CBA, dunque, poichè essendo le basi eguali, ancora gli angoli alla circonferenza devono essere eguali *: sarà l'angolo BAE eguale all'angolo CBA Nell'istessa maniera si mostrerà, che l'angolo CBA sia eguale all'angolo DCB; e che questo sia eguale all'angolo EDC; è questo eguale all'angolo AED; il perchè tutti i cinque angoli del pentagono ABCDE descritto nel cerchio dato saranno eguali; sicchè, essendosi già dimostrato, che i cinque lati del medesimo sono ancora eguali; ne segue, che egli sarà equilatero, ed equiangolo: Ciocchè dovea farsi. * pr. 27. I.

PROP. XII. PROBLEMA.

Descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo intorno ad un cerchio dato. FIG. 10.

I.

Sia dato il cerchio ACCDE; fa duopo descrivere intorno ad esso un pentagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Descrivasi dentro al cerchio dato * *un pentagono equilatero, ed equiangolo, e siano A,B,C, D, E punti, ne' quali gli angoli del pentagono toccano la circonferenza del cerchio.* * pr. ant.

Per li punti A,B,C,D,E così determinati s' intendano passare le tangente HG, GL, KL IH io dico, che il pentagono HIKLG contenuto dalle suddette tangenti, e descritto intorno al cerchio dato sia equilatero, ed equiangolo.

III.

Sia F il centro del cerchio dato, dal quale s'intendano congiunte le linee tette FH FI FK, FL FG; siccome ancora i raggi FA, FB, FC, FD, FE, li quali saranno perpendicolari * rispettivamente alle tangenti HG, HI, IK, KL, LG. Quindi i trian- * pr. 18. III.

goli BBH, FAH saranno rettangoli, e perciò il
*pr.47.I. quadrato dell' ipotenusa FH sarà eguale * così a' quadrati di FB, e BH, come a' quadrati di FA, e di AH; laonde i quadrati di FB, e di BH saranno eguali a' quadrati di FA, e di AH; e per conseguente, essendo il quadrato del raggio FB eguale al quadrato del raggio FA. sarà l'altro quadrato di BH eguale all'altro quadrato di HA, e la linea retta FH sarà e-
*Cor 3. della pr. 47. I. guale alla linea retta HA *: nell' istessa maniera si dimostrerà, che la linea retta AG sia eguale alla sua vicina GE, e la EL alla sua vicina LD, e così si dirà di tutte le altre.

In oltre, essendo la BH eguale alla HA; e la BF eguale alla AF, saranno i due lat; HB, BF del triangolo HBF, eguali a' due lat HA, AF del triangolo HAF, ciascuno a ciascuno: laonde essendo di più la base HF co-
*pr.8.I. mune all' uno triangolo, e all' altro, saranno tutti gli angoli * eguali a tutti gli angoli, ciascuno a diascuno; vale a dire l'anpolo BFH sarà eguale all'angolo AFH; e l'angolo BHF sarà eguale all'angolo AHF; e perciò, così l'angolo BFA, come l'angolo BHA rimane diviso per mezzo della retta FH; nell' istessa maniera si dimostrerà, che gli angoli AFE, AGE sono divisi per mezzo della retta FG; e che gli angoli EFD, ELD sono ancora divisi per mezzo della retta FL, e così dee intendersi di tutti gli altri angoli conseguenti.

Di più cadendo dalla costruzione gli angoli del pentagono equilatero, ed equiangolo descritto nel cerchio ne' punti A,B,C,D,E, saranno i cinque archi AB BC, CD, DE, EA, eguali fra di loro, e per conseguente i cinque angoli al centro AFB, BFC, CFD, DFE. EFA saranno parimente eguali; il perchè essendo stato dimostrato, che essi sono divisi per mezzo dalle rette

FH, FI, EK, FL, FG, saranno i dieci angoli AFH, HFB, BFI, IFC, CFK, KFD, DFL, LFE, EFG, GFA tutti eguali fra di loro.

Finalmente, essendo li due augoli HAF, CAF eguali fra di loro, per essere entrambi retti: siccome ancora essendo eguali gli angoli AFH, AFG saranno i due angoli HAF, AFH del triangolo HAB eguale a' due angoli GAF, AFG del triangolo GAF, ciascuno a ciascuno: quindi, essendo inoltre il lato AF comune ad entrambi i triangoli EAF, GAF, saranno * tutte le altre cose eguali a tutte le altre cose: vale a dire, sarà l'angolo FHA eguale all'angolo FGA, e la retta AH sarà eguale alla retta AG; il perchè tutta la HG rimane divisa per mezzo nel punto A. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo FGE sia eguale all'angolo FLE, e che la retta LG sia divisa per mezzo nel punto E, siccome ancora che l'angolo FLD sia eguale all'angolo FKD, e che la retta LK sia divisa per mezzo nel punto D: così dee intendersi ancora degli altri angoli, e rette conseguenti. * *prop.* 4.

D'onde poi facilmente si conchiuderà, che il pentagono HGLKI sia equilatero, ed equiangolo: I. essendosi dimostrato, che le rette HG, HI sono divise per mezzo ne' punti A, e B, e di più essendosi dimostrato, che la metà HA, HB sono eguali fra loro, saranno ancora tutte le rette HG, HI eguali fra loro: nell'istessa maniera si mostrerà, che HI sia eguale ad IK, e questa a KL, e questa ad LG, e questa ad HG: dimodo che il pentagono HGKLI sarà equilatero: II. Essendosi dimostrato, che l'angolo AHB è diviso per mezzo della retta HF siccome ancora, che l'angolo BIC è diviso per mezzo dalla retta IF; ed essendosi di più dimostra-

strato, che gli angoli FHB, FIB sono eguali fra di loro: ne segue, che l'angolo AHB sia eguale all'angolo BIC, quindi essendo tutto questo discorso applicabile agli altri angoli, ne segue, che il petagono HGLKI sia parimente equiangolo: ciocchè bisognava fare.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un pentagono rquilatero, ed equiangolo dato.

I.

FIG. 13. Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo, fa duopo descriverci dentro un cerchio.

II.

* pr. 9. I. *Si seghino per mezzo li due angoli* * *EAB, ABC per le rette AF, BF, le quali si vadano a congiungere nel punto F.*

* dim. 1. *Si uniscano le rette* * *FG, FD, FE.*

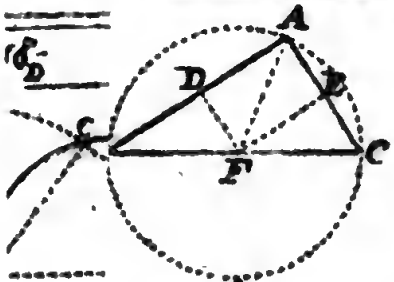
pr. 12. I. *Dal punto F si facciano* * *sopra li lati AB, BC, CD, DE, EA del pentagono cadere le perpendicolari FL, FG, FH, FI, FK.*

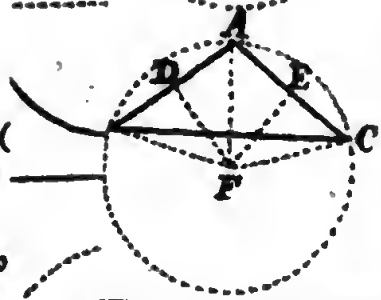
III.

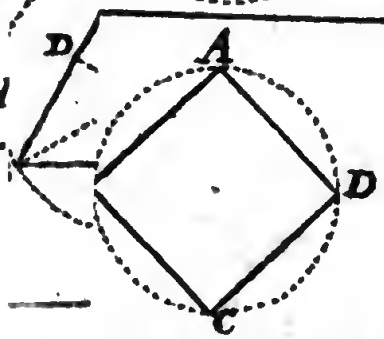
Perchè dalla supposizione AB è eguale alla AE, e la AF è comune saranno li due lati BA, AF del triangolo ABF eguali a' due lati EA, AF del triangolo AEF, ciascuno a ciascuno: quindi, essendo ancora dalla costruzione l'angolo ABF eguale all'angolo AEF, sarà * l'angolo ABF eguale all'angolo AEF: ma dalla costruzione l'angolo ABC è doppio dell'angolo ABF: dunque l'istesso angolo ABC sarà doppio dell'angolo DEF il perchè, essendo dalla supposizione l'angolo AED eguale all'angolo ABC, ne segue, che l'angolo AED sia parimente doppio dell'angolo AEF; e perciò, che l'angolo AED è diviso per mezzo dalla retta FE. Nell'istessa maniera paragonando il triangolo AEF col triangolo DEF, si dimostrerà che l'angolo EDC sia diviso per mezzo dala retta FD, e finalmente, che l'angolo

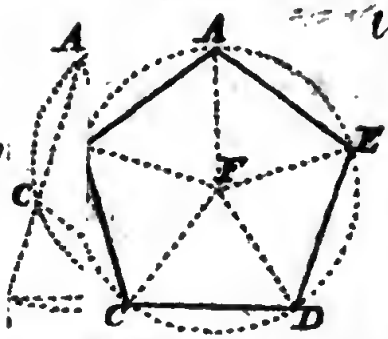
* pr. 4. I.

P. L.
G
A
3 I.
III
B
14.
I.
E I.









ALTA CANIS.

DCB sia diviso per mezzo della retta CF.

Inoltre perchè l'angolo retto FLD è eguale all'angolo retto FKA, e l'Angolo FAL è eguale all'angolo FAK. saranno li due angoli FLE, FAL del triangolo FAL eguali a' due angoli FKA, FAK del triangolo FAK; quindi, essendo il lato FA comune ad entrambi i triangoli; sarà * la retta FL eguale alla retta FK: nell'istessa maniera si dimostrerà, che la FK sia eguale alla FI, e la FI alla FH, e questa alla FG, e questa alla FL: di modo che le cinque rette FL, FK FI, FH, FG saranno tutte eguali fra loro: laonde dal centro FL col raggio FL descrivendo un cerchio, egli passerà necessariamente per li punti K, I, H, e G; e toccherà i lati AB, AE, ED, DC, CB del pentagono ne' suddetti punti *, perchè dalla costruzione le rette FL, FI, FH, FG sono perpendicolari a' suddetti lati del pentagono; ciocchè bisognava fare.

* *pr.* 23. I.

* *pr.* 16. III

PROP. XIV. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un pentagono equilatero, ed equiangolo dato.

I.

Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo, fa duopo descrivere intorno ad esso un cerchio. *FIG.* 14.

II.

Si seghino * *per mezzo di due angoli EAB, ABC per le rette AF, BF.*

Si congiungono * *le rette FE, FD e FC.*

* *pr.* 9. I.

* *dim.* 1.

III.

Siccome dalla supposizione la AB è eguale alla AE, e la AF è comune, così saranno i due lati BA, AF del triangolo BAF eguali a' due lati EA, AF del triangolo EAF, ciascuno a ciascuno: quindi, essendo di più dalla costru-

struzione l' angolo BAF eguale all' angolo EAF
4 I. sarà * la base BF eguale alla base EF, e l' angolo ABF eguale all' angolo AEF: ma dalla costruzione l' angolo ABC è doppio dell' angolo ABF; dunque l' istesso angolo ABC sarà parimente doppio dell' angolo AEF: laonde, essendo dalla supposizione l' angolo ABC eguale all' angolo AED; sarà l' angolo AED doppio dell' angolo *AEF*: e per conseguente l'angolo AED rimane diviso per mezzo della retta EF. Nell' istessa maniera paragonando il triangolo AEF col triangolo DEF, si dimostrerà, che la base AF sia eguale alla base FD, e chè l' angolo EDC resti diviso per mezzo della retta *DF*; e poi paragonando il triangolo EDF col triangolo DCF, si mostrerà, che la base FE sia eguale alla base EC, e che l' angolo DCB rimanga diviso per mezzo della retta CF: di modo che le cinque rette FA, FE, FD, FC, FB saranno eguali fra loro: il perchè dal centro F col raggio FA descrivendo un cerchio, egli passerà per tutti li cinque angoli A, E, D, C, B del pentagono dato Ciocchè dovea farsi.

PROP. XV. PROBLEMA.

Descsive un' essagono equilatero, ed equiangolo in un cerchio dato.

1.

Sia dato il cerchio ABCDEF avendo il cen-
FIG. 15. tro G; fa duopo descrivere esso un' essagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Tirisi il diametro AGD.

*Dal centro D col raggio DF si descriva * il*
* *dim.* 3. *cerchio CGE.*

*Si congiungano * le rette CG, EG.*

* *dim.* 1. *Si distendino la CG in G, e la EG in B.*

* *dim.* 2. *Si congiungano le rette AB, BC, CD, DE, EF, AF,*

AF *. Io dico; che la figura ABCDEF* *dim.* 1.
descritta nel cerchio dato sia un' essagono equilatero, ed equiangolo.

III.

Siccome dalla costruzione il punto D è centro del cerchio CGE, così le tre rette DC, DG, DE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro. Similmente, siccome dalla supposizione G è il centro del cerchio ABCDEF; così le tre rette GC, GD, GE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra loro: d' onde è facile a dedurne, che li due triangoli DCG EDG, sono equilater, e per conseguente equiangoli * :* *Cor.* 1.
Quindi, essendo i tre angoli d' ogni triangolo *della pro.*
eguali a due angoli retti *, sarà così l' angolo *pos.* 5. I.
DGE; come l' angolo DGC eguale alla terza** *pr* 32. *I.*
parte di due angoli retti: laonde essendosi tre angoli DGE, DGC, CGB eguali a' due angoli retti *, sarà l'angolo rimanente CGB eguale** *pr.* 13. *I.*
ancora alla terza parte di d e retti; il perchè li tre angoli DGE, DGC, CGB saranno eguali fra di loro: ma li detti tre angoli DGE, DGC, CGB sono eguali a' tre angoli BGA, AGF, FGE, perchè sono questi opposti al vertice di quelli** * *pr.* 15 *I.*
dunque li sei angoli DGE, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE saranno eguali fra di loro: e per conseguente gli archi DE, DC, CB, BA, DF, FE, a' quali insistono i suddetti sei angoli saranno parimente eguali *: d' onde poi segue, che* *Avverte*
le corde; le quali sono sottoposte agli archi ac- *della pr.*
cennati; cioè le corde DE, CD, CB, BA, AF, 26. III.
FE sono eguali fra di loro *: di modo che *pr.* 27. III.
l' essagono ABCDEF sarà equilatero. Che poi sia equiangolo, si dimostra così *: l' arco AB *pr.* 27 III
è eguale all' arco DC; aggiugnendo dunque comunemente l'arco AFED, sarà l'arco BAFED

egua-

eguale all'arco AFEDC: quindi gli angoli alle circonferenze insistenti ad archi eguali sono eguali fra di loro: sarà l'angolo BCD eguale all'angolo CBA: nell'istessa maniera si dimostrerà; che l'angolo CBA sia eguale all'angolo BAF, e che questo sia eguale all'angolo AFE, e così delli altri: dacchè poi segue che l'essagono ABCDEF sia parimente equiangolo: ciocchè dovea farsi.

Corollario.

Da quì è manifesto, che il lato AB dell'essagono sia eguale al raggio del cerchio, nel quale l'essagono è descritto: e per conseguente tutti i sei lati dell'essagono sono eguali al raggio del cerchio replicato sei volte, ovvero al diametro dell'istesso cerchio replicato tre volte; ma la circonferenza del cerchio è maggiore de'sei lati dell'essagono, dunque la circonferenza del cerchio è maggiore del diametro del cerchio replicato tre volte; vale a dire, se il diametro del cerchio è di sette palmi la di lui circonferenza sarà più di 21. palmi. Di fatti Archimede ha dimostrato, che la circonferenza al diametro sia a un di presso, come 22. a 7.

Avvertimento.

Se, descritto l'essagono ABCDEF nel cerchio dato si tirino per li punti A, B, C, D, E, F le tangenti al cerchio, si vedrà nascere intorno al detto cerchio, un essagono equilatero, ed equiangolo, siccome si è detto nel pentagono: similmente si potrà descrivere un cerchio dentro, ed intorno ad un essagono equilatero, ed equiangolo dato.

PROP. XVI. PROBLEMA.

Descrivere un quindecagono equilatero, ed equiangolo in un cerchio dato.

I.

FIG. 16. Sia dato il cerchio ADE: fa duopo descriversi dentro un quindecagono equilatero, ed equiangolo.

II.

II.

*Descrivasi nel cerchio dato * un triangolo equian-* **pr.2.di*
golo ad un triangolo equilatero qualunque, e il questo- *questo.*
qual triangolo dopo che sarà descritto, si ri-
troverà egli ancora equilatero, e sia AB uno
de' lati del triangolo equilatero.

Descrivasi nel detto cerchio a cominciare del pun-
*to A * un pentagono equilatero, ed equiangolo* **pr. 11. di*
e sia AB uno de' lati del detto pentagono.

*Seghisi l'arco BD per mezzo * nel puto C.* Io **pr.30.III.*
dico, che così l'arco BC, come l'arco CD sono la decimaquinta parte della circonferenza del cerchio dato; di modo che congiugnendo le corde BC, CD, ed adattando nel cerchio continuamente tante altre linee rette eguali a ciascuna delle due BC, CD, si vedrà uscir fuori il quindecagono equilatero, ed equiangolo.

III.

Imperciocchè, siccome la corda AD è uno de lati del triangolo equilatero descritto nel cerchio, così sarà l'arco AD la terza parte della sua circonferenza; quindi, intendendo compartita la detta circonferenza in quindici parti tutte eguali, l'arco AD ne conterrà cinque delle suddette quindici parti. Similmente, perchè la corda AB è uno de' lati del pentagono descritto nel cerchio ABE, sarà l'arco AB la quinta parte della di lei circonferenza; e per conseguente l'istesso arco AB conterrà tre della quindici parti eguali, nelle quali s'intende compartita la di lui circonferenza: ma si è dimostrato l'arco AD contenerne cinque; dunque l'arco BD ne conterrà due; e perciò, così l'archetto BC, come l'altro archetto CD saranno la decimaquinta parte della circonferenza del cerchio, Ciocchè bisognava fare.

LIBRO QUINTO

Definizioni.

I.

Ogni grandezza minore, che misura esattamente un' altra grandezza maggiore, dicesi parte.

II

Viceversa ogni grandezza maggiore, che è misurata esattamente da un' altra grandezza minore, dicesi moltiplice.

Spiegazione.

I nomi di parte, di moltiplice *sono correlativi. Se vi sono due grandezze, una minore, l' altra maggiore tali, che la minore misuri esattamente la maggiore; la minore dicesi* parte *in rispetto della maggiore; e la maggiore dicesi* moltiplice *in rispetto della minore: la voce dunque di* parte *quì è un poco ristretta, nè si prende, come comunemente suol prendersi, per una porzione qualunque d' una grandezza, ma piuttosto per una porzione tale, che misura esattamente il suo tutto. Quindi altri, per maggior distinzione hanno distinte due sorte di parti, l' una* aliquota, *l' altra* aliquanta: *Chiaman parte* aliquanta *quella, che non misura esattamente il suo tutto: chiamano parte* aliquota *quella, che misura il suo tutto esattamente: così per esempio dicono, che il* 5 *sia parte aliquanta del* 12, *e che il* 3 *sia parte aliquota del* 15.

Si vi sono due grandezze minori, le quali contengano un egual numero di volo in due altre grandezze maggiori; le minori si chiameranno parti simili *in riguardo delle maggiori; e viceversa le maggiori si chiameranno* moltiplici simili, *ovvero* egualmente moltiplici *in riguardo delle minori: così per esempio, perchè*

le

le due grandezze minori 2, *e* 5 *si contengono rispettivamente cinque volte nelle maggiori* 10, *e* 25; *le minori* 2, *e* 5 *le chiameremo* parti simili *in riguardo di* 10, *e* 25, *ma le maggiori* 10, *e* 25 *le chiameremo* moltiplici simili, *ovvero più elegantemente* egualmente moltiplici *di* 2, *e* 5.

III.

La ragione non è altra cosa, se non il rapporto di due grandezze omogenee paragonate l'una coll'altra secondo da quantità.

IV.

Due grandezze allora sono omogenee, quando la minore di essa replicata più volte può sopravvanzare la maggiore.

Spiegazione

Per darsi luogo alla ragione si richieggono tre cose: I. Due grandezze; II. Che siano omogenee: III. Che si paragonino insieme secondo la quantità, non già secondo gli altri loro attributi: quando queste tre cose si verificano, si darà luogo alla ragione, la quale altro non è, se non la comparazione scambievole delle due suddette grandezze. Per conoscere poi se due grandezze sono omogenee, o no dovrà tenersi questa regola: bisogna vedere, se la minore di esse replicata più volte è capace di sopravvanzare la maggiore: Ove ciò segua, le due grandezze dovranno stimarsi omogenee; ove no, le due grandezze dovranno stimarsi eterogenee. Così due linee, due superficie, due corpi, due durate: ec. dovranno stimarsi omogenee; imperciocchè la linea minore, la superficie minore, il corpo minore, la durata minore, ec. prese, molte volte possono superare la linea, la superficie, il corpo, e la durata maggiore. Ma una linea non è linea omogenea con una superficie, imperciocchè la linea moltiplicata quante volte si vuole, giammai può degenerare in superficie.

La definizione della ragione adottà da Euclide *è generale, e comprende sotto di se due sorti di ragioni, l' una delle quali dicesi* geometrica, *l' altra* aritmetica, *come che egli tratti poi solamente dalla ragione geometrica. Ma avanti che io entri a ragionare de' caratteri dell' una, e dell' altra, dirò; che siccome in ogni ragione fa duopo, che vi siano due grandezze omogenee; così la prima di esse dicesi* antecedente *della ragione e l' altra dicesi* conseguente *dell' istessa ragione. Quindi ogni ragione tiene un antecedente, ed un conseguente, i quali debbono essere omogenei, altrimente la ragione non vi sarebbe più, secondo quello, che si è detto. Ora è da sapersi, che qualora si compara l' antecedente col conseguente, e si va considerando l' eccesso dell' uno sopra l' altro, ovvero il difetto dell' uno dall' altro: in tal caso la ragione si chiama* aritmetica. *Ma quando si compara l' antecedente col suo conseguente, e si va considerando quante volte l' uno contenga l' altro, ovvero quante volte l' uno si contenga nell' altro, allora la ragione si chiama* geometrica *Così per esempio, se paragonando il lato del quadrato colla sua diagonale si va esaminando quanto il loro sia minore della diagonale, la ragione dirassi aritmetica, ma se paragonando l' una coll' altro si cerca sapere quante volte il loro si contiene nella diagonale, la ragione si chiamerà geometrica Del rimanente è quì da avvertirsi, che siccome può l' antecedente essere maggiore, eguale, e minore del conseguente, così la ragione geometrica non meno che l' aritmetica può essere di* maggiore o minore, *di* eguale ad eguale, *e di* minore a maggiore.

V.

La proporzione altro non è, se non la comparazione di due ragioni eguali.

VI.

Due ragioni allora sono eguali, quando gli

egualmente moltiplici degli antecedenti pigliati secondo qualsivoglia moltiplicazione sono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti pigliati eziandio secondo qualsivoglia moltiplicazione.

VI.

Ma se pigliati gli egualmente moltiplici degli antecedenti secondo qualche moltiplicazione, e presi eziandio gli egualmente moltiplici de' conseguenti parimente secondo qualche moltiplicazione, si troverà, che il moltiplice del primo antecedente avanza il moltiplice del suo conseguente, ma l' egualmente moltiplice dell' altro antecedente non è maggiore dell' egualmente moltiplice del suo conseguente, si dirà, che il primo antecedente al suo conseguente abbia maggior ragione dell' altro antecedente al suo conseguente.

Spiegazione.

Se vi sono due ragioni eguali, e si paragonano insieme, il paragone di queste due ragioni dicesi proporzione, *la quale sarà* aritmetica, *se le due ragioni eguali siano aritmetiche; e sarà* geometrica, *se le due ragioni eguali siano geometriche. Ora è da sapersi, siccome la porzione è il paragone di due ragioni eguali, così ogni proporzione, che contenga due antecedenti, e due conseguenti, dicesi ragione: imperocchè ogni ragione contiene un antecedente, ed un conseguente.*

Due ragioni aritmetiche allora sono eguali, o quando gli eccessi, ovvero i difetti de' due antecedenti da' loro conseguenti sono eguali. Così per esempio le due ragioni aritmetiche di 8, *a* 5, *e di* 4 *a* 1. *sono eguali fra di loro, perchè gli eccessi degli antecedenti* 8 *e* 4 *sopra i loro conseguenti* 5, *e* 1 *sono eguali fra di loro: e così similmente le ragioni aritmetiche di* 4 *a* 6 *e di*

8 a 10 *sono eguali; perchè i difetti degli antecedenti* 4, *e* 8 *da' loro conseguenti* 6, *e* 10 *sono parimente eguali: quindi dicendosi come sta* 8 *a* 5, *così sta* 4 *ad* 1, *ovvero come sta* 4 *a* 6, *così* 8 *a* 10 *si darà luogo alla proporzione aritmetica.*

Due ragioni geometriche allora si dicono eguali, quando gli antecedenti contengono, ovvero sono contenuti da' conseguenti nell' istessa maniera, di modo che quello, che dee fare un' antecedente per rendersi eguale al suo conseguente, quell' istesso debba fare l' altro antecedente per eguagliare il suo conseguente. Quindi le ragioni geometriche di 2 *a* 6, *e di* 4 *a* 12 *sono eguali fra di loro; perciocchè ciascuno antecedente si contiene nel suo conseguente tre volte; parimente la ragione di* 8 *a* 4 *è eguale a quella di* 2. *ad* 1: *perciocchè ciascuno antecedente contiene due volte il suo conseguente. Sicchè dicendosi come* 4 *a* 6, *così* 4 *a* 12, *ovvero come* 8 *a* 4 *così* 2 *ad* 1, *si darà luogo alla proporzione geometrica.*

Euclide, *che ha voluto bandire affatto le idee dal contenere, e dell' essere contenuto dalle ragioni geometriche, come quello, che vedeva non aver luogo nelle quanti à* irrazionali ein commensurabili, *delle quali egli tratta ampiamente nel libro* x, *ci ha additato un altro criterio per discernere se due ragioni geometriche sono eguali, o no, del qual criterio non sembra che i moderni siano rimasti gran fatto soddisfatti, forse perchè non hanno scoperti i veri fonti, da' quali egli lo ha tratto. Il criterio suggeritoci da Euclide è questo: Quando nasce il dubbio se due ragioni geometriche siano eguali, o no, fa duopo pigliare gli egualmente moltiplici degli antecedenti secondo qualsivoglia moltiplicazione, siccome ancora pigliare gli egualmente moltiplici de' conseguenti; parimente secondo qualsivoglia moltiplicazione, ciò fatto, fa duopo paragonare gli uni cogli altri, a vedere se i primi siano tutti due, o maggiori,*

o egua-

e eguali, o minori de' secondi: ove ciò segua in tutte le moltiplicazioni possibili si potrà dire sicuramente, che le due ragioni siano eguali: ma se paragonati gli uni cogli altri si trovi un caso, in cui il moltiplice del primo antecedente è maggiore del moltiplice del suo conseguente, ma il moltiplice del secondo non è maggiore del moltiplice del suo conseguente, in tal caso si dirà, che il primo antecedente al suo conseguente ha maggior ragione dell'altro antecedente al sua conseguente. Questo è il tanto celebre criterio suggeritoci da Euclide, dal quale egli ha dedotte tutte le proprietà delle proporzioni. Per ora basterà di mettersi bene a mente le quattro seguenti proposizioni. I. Se gli egualmente moltiplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio sono entrambi eguali, maggiori, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti pigliati parimente ad arbitrio, le quattro quantità saranno proporzionali. II. *Viceversa*, se quattro quantità sono proporzionali, gli egualmente moltiplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio saranno entrambi eguali, maggiori, e minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti pigliati parimente ad arbitrio: III. Che se pigliati gli egualmente moltiplici così degli antecedenti, come de' conseguenti, si trovi, che il moltiplice del primo antecedente sia maggiore del moltiplice del suo conseguente, ma il moltiplice dell'altro antecedente non sia maggiore del moltiplice del suo conseguente; in tal caso la prima alla seconda avrà maggior ragione della terza alla quarta; IV. *Viceversa*, se la prima alla seconda ha maggior ragione della terza alla quarta si potranno pigliare tali egualmente moltiplici degli antecedenti, e tali egualmente moltiplici de' conseguenti, che quello del primo antecedente sia maggiore di quello del suo con-

seguente, ma quello dell'altro antecedente non sia maggiore di quello del suo conseguente.

VIII.

Le grandezze, che hanno la medesima ragione si chiamano proporzionali.

IV.

In ogni proporzione gli antecedenti si chiamano omologi fra di loro, siccome ancora i conseguenti.

X.

La proporzione almeno ha bisogno di tre termini.

Spiegazione.

Siccome la proporzione è il paragone di due ragioni eguali, così la proporzione dee contenere quattro termini, vale a dire due antecedenti, e due conseguenti. Nulla di manco potria la proporzione aver luogo in tre termini, ma non già in meno di tre termini. Ciò avviene allora quando il conseguente della prima ragione è parimente antecedente dell' altra ragione: in tal caso la proporzione avrà i suoi due antecedenti, e i suoi due conseguenti, quantunque non abbia più di tre termini; e questo a causa che quello di mezzo fa le veci di antecedente nella seconda ragione, e di conseguente nella prima: come si scorge in questa proporzione 8 sta a 4, come l' istesso 4 a 2: Ora è da sapersi, che quando la proporzione ha luogo in tre termini si dice continua; *ma quando ha luogo in quattro termini si chiama* interrotta.

XI.

Ragione permutata si chiama, quando in una proporzione si paragona l'antecedente coll' altro antecedente, ed il conseguente coll'altro conseguente.

XII.

Ragione inversa si chiama, quando in una proporzione l'antecedente si fa conseguente, ed il conseguente si fa antecedente.

XIII.

Ragione composta si dice, quando in una proporzione la somma dell'antecedente, e del conseguente si compara coll'istesso conseguente.

XIV.

Ragione divisa si dice, quando viceversa in una proporzione l'eccesso dell'antecedente sopra il suo consegnente si compara coll'istesso conseguente.

XV.

Ragione conversa si dice, quando in una proporzione si compara l'antecedente coll'eccesso dell'antecedente sopra il suo conseguente.

Spiegazione.

Prendasi una proporzione qualsivoglia come questa: 8 *a* 2, *così* 4 *ad* 1: *se si fa come* 8 *a* 4, *così* 2 *ad* 1: *questa si dirà ragione* permutata; *ma dicendosi come* 2 *ad* 8. *così* 1 *a* 4 *questa si chiamerà ragione* inversa: *inoltre dicendosi come* 10 *a* 2; *così* 5 *a* 1, *questa si dirà ragione* composta; *che se poi si faccia* 6 *a* 2, *così* 3 *ad* 1, *questa si chiamerà ragione* conversa. *Avvertasi quì, che* Euclide *in questo luogo ha inteso solamente spiegare i nomi di ragione* permutata; inversa, composta, divisa, e conversa, *e non altro: che poi una proporzione possa permutarsi, invertersi, comporsi, dividersi, e convertirsi, e ciò non ostante rimanga ancora proporzione, questa è una cosa, che ha bisogno di essere dimostrata; come di fatto egli la dimostra in varj luoghi di questo quinto libro.*

XVI.

Se vi sono più di due grandezze da una parte, che compongono una serie, ed altrettante da un'altra, che compongono un'altra serie, e

sia come la prima alla seconda nella prima serie, così la prima alla seconda nell'altra serie, e come la seconda alla terza nella prima serie, così la seconda alla terza nell'altra serie, e come la terza alla quarta nella prima serie, così la terza alla quarta nell'altra serie, e così ordinatamente in tutte le altre; che seguono: dirassi cotesta ragione ordinata.

XVII.

Ma se come sta la prima alla seconda nella prima serie; così sta la penultima all'ultima nell'altra serie; e come la seconda alla terza nella prima serie, così l'antepenultima alla penultima nell'altra serie; e come la terza alla quarta nella prima serie, così quella, che sta avanti all'antepenultima all'istessa antepenultima, e con quest'ordine si vada avanzando sempre la ragione: dirassi cotesta ragione non ordinata, ma perturbata.

XVIII.

Se poi nell'uno caso, e nell'altro si dice, come la prima all'ultima nella prima serie, così la prima all'ultima nell'altra serie, questa chiamerassi ragione eguale, la quale sarà ordinata, se la ragione sia ordinata; e sarà perturbata, se la ragione sia perturbata.

Spiegazione.

Se vi sono due serie di quantità eguali di numero, e comparate sempre due quantità di una serie con due altre dell'altra serie, esca fuori una proporziane: tal sorte di ragione si chiamerà ora ordinata, *ora* perturbata. *secondo la maniera, nella quale si prendono le grandezze proporzionali, mettiamo, che le due serie siano queste qui scritte, nelle quali come sta 2 a 4 così*

a2,

2 . 4 . 12 . 60
1 . 2 . 6 . 30

a 2, *come* 4 *a* 12, *così* 2 *a* 6, *e come* 12 *a* 60, *così* 6 *a* 30, *dirassi questa ragione* ordinata: *mettiamo inoltre, che le due serie siano queste due altre quì notate, nelle quali come sta*

2 . 4 . 12 . 60
1 . 5 . 15 . 30

2 *a* 4, *così* 15 *a* 30, *e come* 4 *a* 12, *così* 5 *a* 15, *e come* 12 *a* 60, *così* 1 *a* 5; *dirassi quest' altra ragione* perturbata: *nell' una poi, e nell' altra serie se si dice, come* 2 *a* 60, *così* 1 *a* 30, *dirassi questa, ragione* eguale, *la quale sarà* ordinata *nelle due prime serie, e* perturbata *nelle altre due.*

PROP. I. PROBLEMA.

Se quante grandezze si vogliano siano egualmente moltiplici di altrettante grandezze, quanto ciascuna grandezza moltiplice della sua corrispondente, altrettanto saranno moltiplici ancora tutte di tutte.

I.

Siano quante grandezze si vogliano AB, CD egualmente moltiplici di altrettante grandezze E, ed F ciascuna di ciascuna; vale a dire AB di E; e CD di F: io dico, che quando AB è moltiplice della sua corrispondente E, tanto la AB, e CD inlieme saranno moltiplici delle E, ed F insieme. FIG.

Perchè dalla supposizione la AB è tanto moltiplice di E; quanto CD è moltiplice di F, quante grandezze sono nella AB eguali alla E, altrettante ne saranno nella CD egnali alla F. Risolvendo dunque la AB in parti eguali alla E, che siano AG, GB, e risolvendo inoltre la CD in parti eguali alla F, che siano CH, HD, sarà

la moltitudine delle parti AG, GH eguale alla moltitudine delle parti CH, HD. Quindi, perchè la AG è eguale alla E, e la CH è eguale alla F; saranno le due AG, CH insieme eguali alle due E, ed F insieme * ; e similmente le due GB, HD insieme saranno eguali alle due E, ed F insieme; dal che si conchiude, che quante parti sono in AB, e CD insieme eguali alle due E, ed F insieme, altrettante ne sono nella sola AB eguali alla E, e per conseguente, che la AB sia tanto moltiplice della sua corrispondente E, quanto tutte due insieme AB, e CD sono moltiplici di tutte due insieme E, F, Ciocchè dovea dimostrarsi.

* ass. 1.

Dimostrazione co' numeri.

Tutte le proposizioni di questo libro si possono dimostrare per via di numeri. Sia dunque 8 tanto moltiplice di 4, quanto 6 è moltiplice di 3, e quanto 10 è moltiplice di 5: è manifesto, che come 8 è moltiplice di 4, così 24 somma di 8, 6, e 10 è moltiplice di 12 somma di 4, 3, e 5.

8.	4	
6.	3	
10.	5	
24.	12	

PROP. II. TEOREMA.

Se la prima è tanto moltiplice della seconda, quanto la terza della quarta, e sia inoltre la quinta tanto moltiplice dell' istessa seconda quanto la sesta è moltiplice della quarta; sarà la composta dalla prima, e dalla quinta tanto moltiplice della seconda, quanto la composta della terza, e della sesta è moltiplice della quarta.

I.

FIG. 12. Sia la prima AB tanto moltiplice della seconda

da C, quanto la terza DE è moltiplice della quarta F: Sia di più la quinta BG tanto moltiplice dell'istessa seconda C, quanto la sesta EH è moltiplice della quarta F; io dico che la AG composta dalla prima, e dalla quinta sia tanto moltiplice della seconda C, quanto la DH composta dalla terza, e dalla sesta è moltiplice della quarta F.

II.

Perchè dalla supposizione la AB è tanto moltiplice della C, quanto la DE della F; quante grandezze sono in AB eguali a C, tante ne saranno in DE eguali ad F; e similmente quante grandezze sono in BG eguali a C, tante ne saranno in EH eguali ad F; e per conseguente quante ne sono in tutta la AG eguali a C, tante ne saranno in tutta DH eguali alla F: vale a dire la AG sarà tanto moltiplice della C, quanto la DH è moltiplice della F. Quindi, essendo la AG composta dalla prima, e dalla quinta, e la DG essendo composta dalla terza, e dalla sesta, ne segue, che il Teorema in quistione sia vero.

Dimostrazione co' numeri.

8	4	2	1
10	5		
18	9	2	1

Il primo 8 *sia tanto moltiplice del secondo* 2, *quanto il terzo* 4 *del quarto* 1; *il quinto* 10 *sia tanto moltiplice dell' istesso secondo* 2, *quanto il sesto* 5 *è moltiplice del quarto* 1: *egli è manifesto, che* 8 *composto dal primo, e dal quinto è tanto moltiplice del secondo* 2, *quanto* 9 *composto dal terzo, e dal sesto è moltiplice del quarto* 1.

PROP.

PROP. III TEOREMA.

Se la prima sia tanto moltiplice della seconda, quanto la terza è moltiplice della quarta: gli egualmente moltiplici della prima, e della terza pigliati ad arbitrio riusciranno parimente egualmente moltiplici della seconda, e della quarta,

I.

FIG. 3. Se la prima A tanto è moltiplice della seconda B. quanto la terza C è moltiplice della quarta D e si prendono ad arbitrio della prima A, e della terza C gli egualmente moltiplici EF, GH ; io dico, che essi saranno egualmente moltiplici ancora della seconda B, e della quarta D, vale a dire che come EF è moltiplice della B, così la GH è moltiplice della D.

II.

Perchè dalla supposizione le due grandezze EF e GH sono egualmeute moltiplici delle due A, e C, quante grandezze sono in EF eguali ad A, altrettante se ne conterranno in GH eguali a C : risolvendo dunque la EF in parte eguali alla A; le quali siano EK, KF, e risolvendo ancora la GH in parti eguali alla C, le quali siano GL, LH, sarà la moltitudine delle parti, EK, KF eguale alla moltitudine delle parti GL, LH. Quindi poichè dalla supposizione la A è tanto moltiplice della B, quanto la C è moltiplice della D, essendo la EK eguale alla A, e la GL eguale a C, sarà la prima EK tanto moltiplice della seconda B, quanto la terza CL è moltiplice della quarta D. Per l'istessa regione la quinta KF sarà tanto moltiplice della seconda B, quanto la sesta *pr. ant.* LH è moltiplice della quarta D, laonde la composta * EF dalla prima e dalla quiuta sarà tanto moltiplice della seconda B, quanto la composta GH dalla terza, e dalla sesta è molti

tiplice della quarta D: Ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

10 . 2 . 30 . 6
30 . 90

Sia 10 *tanto moltiplice di* 2, *quanto* 30 *è moltiplice di* 6, *dipoi di* 10, *e di* 30 *se ne prendono ad arbitrio gli egualmente moltiplici* 30, *e* 90: *è manifesto, che questi due numeri* 30, *e* 90 *sono parimente egualmente moltiplici di* 2, *e di* 6.

PROP. IV. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, l' egualmente moltiplici della prima, e della terza pigliate ad arbitrio paragonate colle egualmente moltiplici della seconda, e della quarta ancora pigliate ad arbitrio, si ritroveranno parimente avere l' istessa ragione.

I.

Abbia la prima A alla seconda B l' istessa ragione, che la terza C alla quarta D, e pigliansi *FIG. 4.* ad arbitrio le due E, ed F egualmente moltipli. ci di A e di C, siccome ancora le altre due G, ed H egualmente moltiplici di B, e di D; io dico, che la E, sia alla G, come sta la F alla H,

II.

Per dimostrarlo si prendano ad arbitrio K, ed L egualmente moltiplici di E, e di F, ed M, ed N egualmente moltiplici di G, e di H. Perchè dunque la E è tanto moltiplice della A, quanto la F della C, e si sono pigliate le due K ed L egualmente moltiplici di E e di F: saranno* le due K, ed L parimente egualmente moltiplici di A, e di C: per la medesima ragione saranno *pr. ant.*

le

le due M, ed N egualmente moltiplici di B e di D. Quindi supponendosi, che A abbia la medesima ragione a B, che C, a D dovranno le egualmente moltiplici K, ed L degli antecedenti essere o tutte due maggiori, o tutte due eguali, o tutte due minori delle egualmente moltiplici M, ed N de conseguenti: ma K, ed L sono parimente egualmente moltiplici di E, ed F, siccome ancora M, ed N sono egualmente moltiplici di G, ed H, sicchè verificandosi nelle egualmente moltiplici degli antecedenti E, ed F, e de conseguenti G, ed H la legge espressa nella definizione VI di questo libro, ne segue che E abbia la medesima ragione a G, che F ad H.

Corollario.

Di quì è manifesto, che se quattro grandezze, E, G, F, ed H sono proporzionali, ancorchè si invertano, rimarranno proporzionali: vale a dire sarà ancora come G ad E, così H ad F; imperciocchè essendosi dimostrato, che le due K, ed L sono entrambe, o maggiori, o eguali, o minori delle due M, ed N, ne segue, che ancora le due M, ed N saranno entrambe o maggiori, o minori, o eguali alle due K, ed L; quindi disarà come G ad E, così H ad F *. questo.

* def. 6.

Dimostrazione co' numeri.

16 4 . 2 4
24 6 . 3 6

Sia come 4 a 2, così 6 a 3, e stano 16 e 24 egualmente moltiplici gli antecedenti, e 4 e 5 stano egualmente moltiplici de' conseguenti, è chiaro, che 16 sta a 4, come 24 a 6 viceversa, che 4 sta a 16 come 6 a 24.

PROP.

PROP. VI TEOREMA.

Se tutta una grandezza sia tanto moltiplice di tutta un altra grandezza, quanto una parte della prima è moltiplice di una parte della seconda, sarà l' avanzo della prima tanto moltiplice dell' avanzo dell' altra, quanto la tutta è moltiplice della tutta.

I

Sia tutta la grandezza AB tanto moltiplice della grandezza CD quanto la parte AE è moltiplice della parte CF; io dico, che la rimanente EB sia tanto moltiplice della rimanente FD, quanto la tutta AB è moltiplice della tutta CD. *FIG.* 5.

II.

Per dimostrarlo, s' intenda alla CD aggiunta per diritto la CG tale, che EB sia tanto moltiplice di essa, quanto la tutta AB è moltiplice della tutta CD; e per conseguente quanto la parte AE è moltiplice della parte CF. Poichè dunque la AE tanto moltiplice della CF, quanto la EB è moltiplice della GC, sarà * la AB tanto moltiplice della GF, quanto la AE è moltiplice della GF, e per conseguente quanto la AB è moltiplice della CD; quindi, essendo la AB egualmente moltiplice delle due GF, CD; saranno * queste eguali tra di loro; si toglie via la CF, la quale è comune, e rimarrà * la CG eguale alla FD, ma si è supposto, che la EB sia tanto moltiplice della parte aggiunta CG, quanto la AB è moltiplice della CD, dunque sarà parimente la EB, tanto moltiplice della FD, quanto la tutta AB è moltiplice della tutta CD; ciocchè dovea dimostrarsi. * *pr.* 1. *di questo* * *ass.* 7. * *ass.* 8.

Dimostrazione co' numeri.

20.	5	*Sia* 20 *tanto moltiplice di* 5, *quanto*
4.	1	*la parte* 4 *è moltiplice della parte* 1. *egli*
. . . . .		*è manifesto, che il rimanente numero*
16.	4	16 *sia tanto moltiplice del rimanente*

nu-

numero 4, quanto tutto il numero 20 è moltiplice di tutto il numero 5.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se una grandezza è moltiplice di un' altra grandezza, ed una parte della prima sia parimente moltiplice della medesima grandezza; è certo, che la rimanente o sia moltiplice, o per lo meno sia eguale all' altra grandezza. Così 30 è moltiplice di 5, e 20, che è parte di 30 parimente è moltiplice di 5; l' avanzo 10 è moltiplice anche dell' istesso 5. Inoltre 15 è moltiplice di 3, e la parte 12 è ancora moltiplice di tre: ma quì l' avanzo 3 è eguale all' istesso 3.

PROP. V. TEOREMA.

Se due grandezze siano egualmente moltiplici di due altre grandezze; ciascuna di ciascuna: e siano inoltre due parti di quelle egualmente moltiplici delle medesime, saranno le rimanenti, o egualmente moltiplici, o per lo meno eguali ad esse.

I.

FIG. 6. Siano le due grandezze AB, CD egualmente moltiplici di E e di F, vale a dire AB di E, e CD di F, e siano inoltre le parti AG, CH egualmente moltiplici delle medesime E, ed F; io dico, che le rimanenti GB, HD saranno o egualmente moltiplici, o per lo meno eguali alle due E, ed F; vale a dire, che se BG è moltiplice, ovvero eguale ad E, ancora la HD sarà egualmente moltiplice, ovvero eguale alla F.

II.

Supponendo I. Che la CB sia moltiplice della E; intendasi alla DC, aggiunta per diritto la CK, in modochè essa sia tanto moltiplice della F, quanto la GB è moltiplice della E. Quindi, poichè la AG prima è tanto moltiplice della seconda E, quanto la terza CH è moltiplice della quarta F, e la quinta GB tanto moltiplice della secon-

da

da E, quanto la sesta CK della quarta F, sarà* la AB composta dalla prima, e dalla quinta tanto moltiplice della seconda E, quanto ha KH composta dalla terza, e dalla sesta è moltiplice della quarta F: ma dalla supposizione la AB è tanto moltiplice della F, quanto la CD è moltiplice della F, dunque le KH CD saranno egualmente moltiplici delle medesime, E ed F, e per conseguente saranno eguali fra di loro: togliendone via la CH, la quale è comune; rimarrà l'avanzo CK eguale all'avanzo HD: ma si è supposto, che CK sia tanto moltiplice di F, quanto BG è moltiplice di E; dunque sarà parimente HD tanto moltiplice di F, quanto BG è moltiplice di F.

*pr. 2. di questo.

Supponendo II. che BG sia eguale ad E io dico, che DH sia parimente eguale ad F: Intendasi alla CD aggiunta per diritto la CK eguale alla F. Quindi, poichè la AG è tanto moltiplice della E quando la CH è moltiplice della F, e la CB è eguale all'istessa E; siccome la CK è eguale alla F: sarà la AB, tanto moltiplice della E, quanto la KH è moltiplice della F: ma dalla supposizione la AB è tanto moltiplice della E, quanto la CD è moltiplice della F: dunque le due KH, CD saranno egualmente moltiplici dell'istessa F, e per conseguente saranno eguali fra di loro: si toglia via la comune CH; rimarrà la CK eguale alla HD, ma la CK dalla costruzione è eguale alla F, dunque la HD è ancora eguale alla F: Ciocchè dovea dimostrarsi.

20 . 4 . 5 . 1.
12 . 3
. . . . . .
8 . 4 . 2 . 1

8 a 20, *tanto moltiplice di* 4, *quanto* 5 *è moltiplice di* 1, *e sia inoltre* 12 *tanto moltiplice dell istesso* 4, *quanto* 3 *è moltiplice di* 1: *è manifesto, che l'avanzo* 8 *è tan-*

tanto moltiplice del medesimo 4, *quanto l'avanzo* 2 *è moltiplice di* 1. *Sia di più* 30 *tanto moltiplice di* 6, *quanto* 10 *è moltiplice di* 2; *e* 24 *sia tanto moltiplice dell'istesso* 6, *quanto* 8, *è moltiplice di* 2; *è manifesto: che, siccome l'avanzo* 6 *è eguale a* 6, *così l'avanzo* 2 *è eguale a* 4.

30 . 6 . 10 . 2
24 . 8
. . . . . .
6 . 6 . 2 . 2

PROP. VII. TEOREMA.

I. Due grandezze eguali hanno la medesima ragione ad una terza grandezza: II. Viceversa una terza grandezza ha la medesima ragione a due grandezze eguali.

I.

FIG. 7 Siano due grandezze eguali, A, e B, e sia la terza grandezza C; io dico primieramente, che A stia a C, come sta B a C. Dico in secondo luogo, che C stia ad A, come sta C a B.

II.

I. Pigliansi le grandezze D, e E ad arbitrio egualmente moltiplici delle due A, e B. e piglisi inoltre la grandezza F moltiplice della terza C. Siccome le due A, e B dalla supposizione sono eguali fra loro, così gli egualmente moltiplici di esse D, ed E saran-
* *ass.* 6. no fra di loro eguali *. Quindi le due D, ed E saranno entrambe, o maggiori, o eguali,
* *ass.* 1. o minori della terza F: il perchè aveudo due ragioni di A a C, e di B a C; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici D, ed E degli antecedenti A, e B siano entrambi [o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici F, ed F de' conseguenti C,
* *def.* 9. *di questo.* e C; ne segue *, che le suddette due ragioni siano eguali: vale a dire, che la A sia alla C, come sta la B alla medesima C.

II. Supposte le medesime cose dimostreremo

si-

similmente, che la F, o è maggiore; o è eguale, o minore di ciascuna delle due D, ed E: Quindi, avendo due ragioni di C ad A, e di C a B, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici F, ed F degli antecedenti C, e C sono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici D, ed E de' conseguenti A, e B; ne segue, che le suddette due ragioni siano eguali; vale a dire, che la C stia alla A, come sta la C alla B. *def.6. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

Siano due numeri 8, *e* 8 *eguali fra di loro, ed il terzo numero* 4, *egli è manifesto, che come sta* 8 *a* 4, *così sta* 8 *a* 4: *viceversa, come sta* 4 *ad* 8, *così sta* 4 *all' istesso* 8.

8
4
8
4

PROP. VIII. TEOREMA.

I. Se due grandezze sono disuguali, esse non hanno la medesima ragione ad una terza grandezza: ma quella ha maggior ragione alla terza, la quale è più grande: II. Viceversa una terza grandezza ha maggior ragione alla più piccola di due grandezze disuguali, che alla più grande.

I.

Siano due grandezze disuguali AB, e C ed una terza grandezza D; e sia AB maggiore di C: io dico, che la AB ha maggior ragione alla D; che la C all' istessa D, e viceversa, che la D ha maggior ragione alla C, che alla B. FIG. 8.

II.

Siccome dalla supposizione la AB è maggiore dalla C, così si può da essa tagliare una parte eguale * alla minore C. Taglisi dunque I. *la BE, eguale alla C. II. Si prendano le tre grandezze FG, GH, ed M egualmente moltiplici rispettivamente delle tre grandezze AE, EB, e C, ma con questa* * pr. 3 I.

legge, che la FG. la quale è moltiplice dell' AE sia maggiore della D. III. Si prenda dalla E il moltiplice N, ma con questa legge, che egli superi HG moltiplice di BE di una parte non maggiore di D.

III.

I. Perchè dalla costruzione le due BE, e C sono eguali fra di loro: i loro egualmente moltiplici GH, ed M saranno * parimente eguali: onde, siccome la N dalla costruzione è maggiore della GH; così sarà parimente la N maggiore della M *. Di più perchè dalla costruzione la N supera la HG di una parte non maggiore di D, e dall'istessa costruzione la FG è maggiore di D; sarà la FH maggiore di N: quindi delle due grandezze FH ed M, la prima FH è maggiore di N, e l'altra M non è maggiore di N. Inoltre, perchè dalla costruzione le due FH, e GH sono egualmente moltiplici delle due AE, EB, sarà * la FH tanto moltiplice della AB quanto la GH è moltiplice del EB, ovvero, quanto la M è moltiplice della C: il perchè avendo due ragioni di AB a D, e di C a D, ed essendosi dimostrato, che FH moltiplice della prima AB supera N moltiplice della seconda D, ma M moltiplice della terza C è minore di N moltiplice della quarta D; ne segue *, che AB ha maggior ragione a D, che C a D.

* *ass.* 1.

* *ass.* 2.

* *pr.* 1. *di questo.*

* *def* 7. *di questo.*

II. Viceversa avendo due ragioni di D a C, e di *D* ad AB: essendosi dimostrato, che N moltiplice della prima D supera M moltiplice della seconda C: ma che N moltiplice della terza D non supera HF moltiplice della quarta AC, ne segue, che D, A, C, abbia maggiore ragione di D ad AB: ciocchè dovea dimostrarsi.

Di-

Dimostrazione co' numeri.

6 3 — 18 12 6 9 . 2 14 — 12 12 6 6 . 2 14

Siano i due numeri disuguali 9 *e* 6, *ed il terzo* 2, *io dico, che* 9 *a* 2 *ha maggior ragione di* 6 *a* 2; *e viceversa, che* 2 *a* 6 *ha maggior ragione di* 2 *a* 9. *Quantunque ciò sia manifesto da se medesimo, tuttavolta si dimostra così; si levi dal numero maggiore* 9 *la parte* 3, *di modo che l'avanzo* 6 *sia eguale al numero minore* 6; *dopo de' numeri* 3, 6, *e* 6 *se ne prendano gli egualmente moltiplici* 6, 12 *e* 12 *con questa legge, che* 6 *moltiplice di* 3 *sia maggiore di* 2. *Ciò fatto facendo una somma degli egualmente moltiplici di* 3, *e* 6 *saranno i numeri* 18, *e* 12 *egualmente moltiplici di* 9, *e* 6: *finalmente de' numeri* 2, *e* 2 *se ne prendano gli egualmente moltiplici* 14, *e* 14, *con quella legge, che il detto* 14 *sia maggiore di* 12, *moltiplice di* 6, *di una parte non maggiore di* 2: *ora* 18 *moltiplice di* 9 *essendo maggiore di* 14 *moltiplice di* 2, *ma* 12 *egualmente moltiplice di* 6 *non essendo maggiore di* 14 *egualmente moltiplice di* 2; *ne segue* * *che* 9 *ha maggiore ragione a* 6, *che* 6 *a* 2. *Viceversa* 14 *moltiplice di* 2 *superando* 12 *moltiplice di* 6; *ma* 14 *egualmente moltiplice di* 2 *non essendo maggiore di* 18 *egualmente moltiplice di questo* 9, *ne segue che* 2 *a* 6 *ha maggior ragione di* 2 *a* 9.

* def. 7. di questo.

* def. 7. di questo.

PROP IX. TEOREMA.

I. Se due grandezze hanno la medesima ragione ad una terza grandezza, esse sono eguali fra di loro: II. E se una terza grandezza ha la medesima ragione a due grandezze; queste due grandezze sono eguali.

I.

Siano le due grandezze A, e B, e sia la terza FIG. 9.

C: io dico, che se A sta a C, come sta B a C, la A sarà eguale alla B: dico di più, che se C sta ad A, come sta C a B, sarà similmente la A eguale alla B.

II.

Imperciocchè: I. Se A non fosse eguale a B, ma fosse per esempio A maggiore di B, avrebbe A maggiore ragione a C *, che B a C; il che è contrario alla supposizione, la quale vuole che A stia a C, come sta B a C; II. Se A fosse maggior di B, avrebbe C a B maggior ragione *, che C ad A; il che è parimente contrario alla supposizione, la quale vuole, che C stia ad A, come sta C a B. Ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.ant.*

* *pr.ant.*

PROP. X TEOREMA.

I. *Di due grandezze, che hanno ragione ad una terza grandezza, quella, che ha da essa maggior ragione è maggiore: II. E quella, alla quale la terza grandezza ha maggiore ragione è minore.*

I.

FIG.10. Siano le due grandezze A, e B, e sia la terza grandezza C, io dico, che A sarà maggiore di B, ove A abbia maggior ragione a C, che B a C; dico di più, che B sarà minore di A, ove C abbia maggior ragione a B, che l'istessa C ad A.

I.

Imperciocchè I. Se A non è maggior di B, sarà A, o eguale a B, ovvero A minore di B: non può essere A eguale a B: perchè sarebbe * A C: così B a C, contra la supposizione, la quale vuole che A abbia maggiore ragione a C, che B a C, non può essere A minore di B: poichè A avrebbe a C minor ragione *, che B a C: ciocchè parimente è contra la supposizione, a quale vuole che A abbia maggior ragione a C, che B a C:

* *pr.1. di questo.*

* *pr.8. di questo.*

II.

II. Se A fosse eguale a B, avrebbe C ad A la medesima ragione *, che C a B: ciocchè è contrario alla supposizione, la quale vuole, che C abbia maggior ragione a B, che C ad A: se poi fosse A minore di B; C avrebbe ad A maggior ragione * di C a B; ciocchè è parimente contrario alla supposizione, la quale vuole, che C abbia maggior ragione a B, che C ad A. Ciocchè dovea dimostrarsi.

pr 7. di questo.

pr 8 di questo.

La dimostrazione co' numeri è manifesta.

PROP. XI. TEOREMA.

Due ragioni eguali ad una medesima ragione sono eguali fra di loro.

I.

Siano le tre ragioni di A a D, di B ad F, e di G ad F, ed A stia a D, come sta B ad E, e B stia ad E, come sta C ad F; io dico, che come sta A a D, così starà C ad F. *FIG. 11.*

II.

S' intendano le grandezze G, H, ed I egualmente moltiplici rispettivamente degli antecedenti A, B, e C: e parimente le grandezze K, L ed M egualmente moltiplici de' conseguenti D, E, ed F: Poichè dunque come sta A a D, così sta B ad E, ne segue *, che gli egualmente moltiplici G, e H degli antecedenti A, e B siano entrambi, o maggiori, o minori, o eguali agli egualmente moltiplici K ed L de' conseguenti D, ed E. Parimente, poichè B sta ad E, come sta C ad F; ne segue *; che gli egualmente moltiplici * H, ed I degli antecedenti B, e C siano entrambi, o maggiori, o minori, o eguali agli egualmente moltiplici L, ed M de' conseguenti E, ed F; quindi, se G avanza K, ancora l' avanzerà M; e se gli è eguale, gli sarà parimente eguale, e se è minore, sarà ancora

def. 6. di questo.

def. 6. di questo.

cora minore, il perchè A, D, C, F *, alle quali si riferiscono i suddetti egualmente moltiplici saranno proporzionali; e per conseguente sarà, come A a D, così C ad F: Il che dovea dimostrarsi.

*def 6. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

2 . 6 *Sia* 2 *a* 6, *così* 1 *a* 3: *e come* 1 *sta a*
1 . 3 3, *così sia* 4 *a* 12: *Egli è manifesto*,
4 . 12 *che come sta* 2 *a* 6, *così sta* 4 *a* 12.

PROP. XII. TEOREMA.

Se vi siano più ragioni eguali; come stanno degli antecedenti al suo conseguente, così saranno tutti gli antecedenti insieme a tutt'i conseguenti insieme.

I.

FIG 12. Siano le ragioni di A a D, di B ad E, e di C ad F eguali fra di loro; vale a dire, come A sta a D, così sia B ad E, così C ad F: io dico, che come sta l'antecedente A al suo conseguente D: così saranno tutti gli antecedenti A, B, e C a tutt'i conseguenti D, E, ed F.

II.

S'intendono le grandezze G. H, ed I egualmente moltiplici degli antecedenti A, B, e C; e similmente le grandezze K. L, ed M egualmente moltiplici de' conseguenti D, E ed F. Perchè dunque le grandezze A, B, C hanno l'istessa ragione alle grandezze D, E; ed F *; ne segue, che gli egualmente moltiplici G, H, ed I saranno tutti tre, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K L, ed M de' conseguenti; quindi, se G è maggiore di K; saranno tutti tre insieme G, H, ed I ancora maggiori di tutti tre insieme K, L, ed M, e se G sia eguale a K, saranno ancora tutti tre in-

*def 6. di questo.

insieme G, H, ed F eguali a tutti tre insieme K, L, ed M: e finalmente, se G è minore di K, saranno tutti tre insieme G, H, ed I minori di tutti tre insieme D, E, ed F.

Inoltre, perchè le tre grandezze G, H, ed I sono egualmente moltiplici delle tre grandezze A, B, e C, come la G è moltiplice della A, così saranno * tutte tre unite insieme G, H, ed I moltiplici di A, B, e C unite insieme; e similmente come la L è moltiplice della D: così saranno tutte tre unite insieme K L, ed M moltiplici di D, E, ed G tutte insieme; il perchè avendo due ragioni di A a D, e della somma di A, e C alla somma di D, E, ed F; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, che sono G, e la somma di G, H, ed I sono entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti, che sono K, e K, L, ed M. ne segue, che le suddette ragioni siano eguali *; e per conseguente, che A sia a D, come sta la somma di A, B, e C alla somma di D, E, ed F: ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr. 1. di questo.*

* *pr. 6. di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

4 . 1 *Sia come* 4 *ad* 1, *così* 8 *a* 2, *e così* 32
8 . 2 *o* 5: *egli è manifesto, che, come sta l'*
20 . 5 *antecedente* 4 *al conseguente* 1, *così sarà*
. . . . . *la somma* 32 *di tutti gli antecedenti alla*
32 . 8 *somma* 8 *di tutti i conseguenti.*

PROP. XIII. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, ma la terza alla quarta abbia maggior ragione, che la quinta alla se-

sesta, ancora la prima alla seconda avrà maggior ragione, che la quinta alla sesta.

I.

FIG. 13. La prima A abbia alla seconda B la medesima ragione, che la terza C alla quarta D; ma la terza C alla quarta D abbia maggior ragione, che la quinta E alla sesta F: io dico, che la prima A ha maggior ragione alla seconda B, che la quinta E alla sesta F.

II.

Perchè dalla supposizione C ha maggior ragione a D, che ad F, si possono trovare tali egualmente moltiplici degli antecedenti C, ed E, e tali egualmente moltiplici de' conseguenti D, ed F, che * quello di C superi quello di D, ma quello di E non superi quello di F: siano cotesti egualmente moltiplici G, H K, ed L: vale a dire G, ed H di C, ed E di K, ed L di D; ed F: sarà dunque G maggiore di K, ed H non sarà maggiore di L. Intendasi ora la grandezza M tanto moltiplice di A, quanto la G è moltiplice di C, e per conseguente quanto la H è moltiplice di E. Intendasi di più la grandezza N tanto moltiplice di B, quanto la K è moltiplice di D, e per conseguente, quanto la L è moltiplice di F: quindi supponendosi, che A sia a B, come sta C a D: gli egualmente moltiplici M, e G degli antecedenti * seguiranno l'istessa legge paragonati cogli egualmente moltiplici N, e K de' conseguenti; il perchè G superando per quello, che si è supposto K, sarà parimente M maggiore di N: avendo dunque due ragioni di A a B, e di E ad F: ed essendosi dimostrato, che il moltiplice M della prima A è maggiore del moltiplice N della seconda B: ma l'egualmente moltiplice H della terza E non è maggiore dell' egualmente moltiplice L della quarta F; ne-

* *def.* 7. *di questo.*

* *def.* 6. *di questo.*

se-

segue, che le suddette due ragioni non siano eguali; e per conseguente, che A a B abbia maggiore ragione di E ad F.

Dimostrazione co' numeri.

10 . 2
5. 1.
4 . 3.

Sta come 10 *a* 2, *così* 5 *ad* 1 : *ma* 5 *ad* 1 *abbia maggior ragione di* 4 *a* 3: *egli è manefesto, che* 10 *a* 2 *ha maggior ragione di* 4 *a* 3.

PROP. XIV. TEOREMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali; secondo che la prima è maggiore eguale, o minore della terza, sarà la seconda maggiore, eguale, o minore della quarta.

I.

Sia, come A a B, così C a D; io dico, che secondo che la prima A è maggiore, eguale, o minore della terza C, sarà ancora la seconda B maggiore, eguale, o minore della quarta D. *FIG.* 14.

II.

Imperciocchè, supponendo: I. che A sia maggiore di C, avrà A maggior ragione a B *, che C a B: ma A sta a B dalla supposizione, come C a D; dunque C avrà parimente maggior ragione a D, che C a B *: e per conseguente aarà la D minore della B *, ovvero la B maggiore della D. *pr. 8. di questo.* *pr. ant. *pr. 10. di questo.*

Supponendo II. che B sia eguale a C, sarà come A a B così C a B *: ma dalla supposizione la A sta alla B, come la C alla D dunque sarà ancora, come la C alla D, così * la C alla B e per conseguente la D sarà eguale alla B, ovvero la B alla D. *pr. 7. di questo, *pr. 11. di questo.*

Supponendo III. che A sia minore di C, avrà A a C minor ragione di C a B *; ma dalla supposizione la A sta alla B come la C alla D, dunque la C alla D avrà parimente minor ragione della C alla B *: quindi sarà la D maggiore della B, ov. *pr. 9. di questo. *pr. 8. di questo.*

B, ovvero la B minore della D: ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

4 . 8 : 3 . 6
4 . 8 : 4 . 8
4 . 8 : 6 . 12

Sia I. *come* 4 *ad* 8, *così* 3 *a* 6, *egli è manifesto, che siccome* 4 *è maggiore di* 3, *così* 8 *è maggiore di* 6: *Sia* II. *come* 4 *ad* 8, *così* 4 *ad* 8; *egli è chiaro, che siccome* 4 *è eguale a* 4, *così* 8 *è eguale a* 8: *Sia* III. *come* 4 *ad* 8, *così* 6 *a* 12: *è manifesto, che siccome* 4 *è minore di* 6, *così* 8 *è minore di* 12.

PROP. XV. TEOREMA.

Le parti paragonate co' loro egualmente moltiplici ritrovano avere la medesima ragione.

I.

FIG. 15 Siano A, e B due grandezze arbitrarie, e CF, FK due altre grandezze tali, che le prime A, e B siano parti simili di esse; ovvero (il ritorno all'istesso), che esse siano egualmente moltiplici delle dette grandezze A, e B; io dico, che paragonando le une coll'altre, si troverà essere A a B: come CF va a GH.

II.

Siccome le grandezze CF, GK sono dalla supposizione egualmente moltiplici delle grandezze A, e B, quante parti si conterranno nella CF eguali alla A tante se ne conterranno nella GK eguali alla B. Siano dunque le parti CD, DE, EF eguali alla A; e le parti GH, GL, LK eguali alla B. Ora, perchè le grandezze CD, DE, EF sono eguali fra di loro, e sono eguali parimente le grandezze GH, HL, LK, sarà come CD a GH, così DE ad HL, ed EF ad LK; quindi uno degli

gli antecedenti CD sarà al suo conseguente CH, come tutti gli antecedenti CF a tutt' i conseguenti GK * : ma CD è eguale alla A ; e GH è eguale alla B: dunque sarà parimente come la A alla B, così CF a CK ; ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Siano le due parti 2, *e* 6, *e gli egualmente moltiplici di queste parti siano* 12, *e* 36: *egli è manifesto, che come sta* 2 *a* 6, *così sta* 12 *a* 36.

12	2
36	6

**pr.12.di questo.*

PROP. XVI TEOREMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali, ancorachè si permutino, rimarranno proporzionali.

I.

Siano quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, vale a dire sia come A a B; così C a D; io dico, che permutandole, rimarranno ancora proporzionali; cioè, come sta A a C, così sarà B a D. FIG.16.

II.

S' intendano le grandezze E, ed F egualmente moltiplici di A, e di B siccome ancora le grandezze G, ed H egualmente moltiplici delle grandezze C, e D: poichè dunque le grandezze E, ed F sono egnalmente moltiplici di A, e B: sarà come * E ad F, così A a B ; quindi essendo dalla supposizione, come A a B, così C a D, sarà parimente come E ad F * così C a D. Inoltre, perchè le grandezze G, ed H sono egualmente moltiplici delle grandezze C a D; sarà *, come G ad H, così C a D; ma si è dimostrato, che E sia ad E, come sta C a D; dunque sarà E ad F *, così G ad H, il perchè, se E supera, è eguale, o minore di G, ancora F avanzerà e sarà

* *pr. antecedente.*

* *pr.11.di questo.*

* *pr. antecedente.*

* *pr.11.di questo.*

* *pr.14.di questo.*

rà eguale, o minore di D. Quindi avendo due ragioni di A a C, e di B a D; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici E, ed F degli antecedenti A, e B siano tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici G, ed H de' consegnenti C, e D, ne segue *: che le suddet. te due ragioni siano eguali, e per conseguente che A sia a C, come sta B a D; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *def. 6. di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

4 . 4 : : 6 . 12
2 . 6 : : 4 . 12

Sia come 2 a 4, così 6 a 12: è manifesto, che permutati questi quattro numeri, sarà ancora 2 a 6, così 4 a 12.

PROP. XVII. TEOREMA.

Se quattro grandezze composte sono proporzionali, ancorchè si dividano, rimarranno proporzionali.

I.

FIG. 17. Siano due grandezze omogenee, e composte insieme AB, BC, e due altre pure omogenee, e composte insieme DE, EF, e siano tra loro proporzionali; vale a dire, come sta AB a BC, così sia DE ad EF; io dico, che dividendole, rimarranno proporzionali; cioè, che AC sarà a CB, come sta DF ad FE.

II.

Prendansi delle AC, CB, DF, FE gli egualmente moltiplici, i quali siano GH, HI, LM, MN, secondo un medesimo qualunque numero, vale a dire, quanto la prima GH è moltiplice della sua corrispondente AC, altrettanto le altre HI, LM, MN siano moltiplici rispettivamente delle CB, DE, FE: Si prendino di più delle

due

due grandezze CB, FE due altri egualmente moltiplici adarbitrio, i quali siano IO, NP. Perchè dunque GH è tanto moltiplice di AC, quanto HI è moltiplice di CB, sarà * la GI tanto moltiplice della AB, quanto la GH è moltiplice della sua corrispondente AC. Per la medesima ragione la L N sarà tanto moltiplice della DE, quanto la L M è moltiplice di DF: quindi, essendo dalla supposizione la GH, tanto moltiplice della AC, quanto la LM è moltiplice della DF: ne segue, che la GI sia tanto moltiplice della AB, quanto la LN è moltiplice della DE. Inoltre essendo la prima HI tanto moltiplice della seconda CB, quanto la terza MN è moltiplice della quarta FE, e la quinta IO, essendo tanto moltiplice dell'istessa seconda CB, quanto la sesta N è moltiplice della quarta FE, sarà la HO composta dalla prima, e dalla quinta * tanto moltiplice della seconda CB, quanto la MP composta dalla terza e dalla sesta è moltiplice della quarta FE. Il perchè esssendo dalla supposizione AB a BC, come DF ad EF; ne segue, che gli egualmente moltiplici GI, ed LN degli antecedenti AB, e DE siano entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici HO, MP de conseguenti CB, FE: quindi togliendone le parti comuni HI, MN *, rimarranno le due GH, LM entrambe, o maggiori, o eguali, o minori delle due IO, NP sicchè avendo due ragioni di AC a CC, e di DF ad FE, ed essendosi dimostrato che gli egualmente moltiplici GH, LM degli antecedenti AB, DF sono entrambi, o maggiori o eguali, o minori degli egualmente moltiplici IO, NP de' conseguenti CB, FE; ne segue, che le suddette due ragioni sieno eguali; e per conseguente, che AC sia a CB, come

* *pr. 1. di questo.*

* *pr. 2. di questo.*

* *def. 6. di questo.*

* *ass. 2. 4.*

sta

sta DF ad FE. Ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 2 . . 4 . 1
6 . 2 . . 3 . 1

Sia come 9 a 2, così 4 a 1. egli è chiaro, che dividendo cotesti numeri, e facendo come 6 a 2, così 3 a 1, essi rimangono proporzionali.

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se quattro grandezze divise sono proporzionali, ancorchè si compongono rimarranno proporzionali.

I.

Siano le quattro grandezze divise AB, BC, DG, GF proporzionali: vale a dire, come sta AB a BC, così sta DG a GF; io dico: che componendole, rimarranno proporzionali, dimodochè, come sta AC a CB, così sarà DF ad FG.

FIG. 18.

II.

Se questo non è vero, si metta, che AC sia a CB, come sta DF ad FE; quindi essendo le quattro grandezze composte AC, CB, DF, FE proporzionali, dividendole, rimarranno * proporzionali: e per conseguente sarà AB a BC così DE ad EF; ma dalla supposizione, come sta AB B.., così sta DG a GE; dunque sarà parimente * come DG a GF, così DE ad EF, il perchè essendo la prima DG maggiore della terza DE, sarà parimente * la seconda GF maggiore della quarta EF, vale a dire la parte sarà maggiore del tutto; ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

* *pr. ant.*
* *pr. 11. di questo.*
* *pr. 14 di questo.*

Di-

Dimostrazione co' numeri.

6 : 2 : : 12 . 4 | *Sia, come* 6 *a* 2, *così* 12
8 . 2 : : 16 . 4 | *a* 4. *è manifesto, che componendo cotesti numeri, e facendo, come* 8 *a* 2; *così* 16 *a* 4, *essi rimangono parimente proporzionali.*

PROP. XIX. TEOREMA.

Se tutta una grandezza sta a tutta un' altra grandezza, come una certa parte di quella ad una certa parte dell' altra, sarà ancora la rimanente parte dell' una alla rimanente parte dell' altra, come sta tutta la prima grandezza a tutta l' altra grandezza.

I.

Sia, come tutta la AB a tutta CD, così la parte AE alla parte CF: io dico, che l'avanzo BE sta all'avanzo DF, come sta tutta la AB a tutta la CD. *FIG.* 19.

II.

Perchè dalla supposizione la AB sta alla CD, come la AE alla CF, sarà per ragion permutata * come AB ad AE, così CD a CF; quindi essendo le quattro grandezze poste AB, AE, CD, CF proporzionali, dividendole rimarranno * ancora proporzionali, e per conseguente sarà BE ad EA, come DF ad FC; e di nuovo per la ragione permutata, sarà, come BE a DF, così AE ad FG: ma dalla supposizione AE sta a CF, come tutta la AB a tutta la CD; dunque * sarà ancora l'avanzo BE all'avanzo DF, così tutta la AB a tutta la CD: ciocchè dovea dimostrarsi. * *pr.* 16. *di questo.* * *pr.* 17. *di questo.* * *pr.* 11. *di questo.*

COROLLARIO.

Da qui è manifesto, che se quattro grandezze composte sono porporzionali, ancorchè si convertano, rimarranno proporzionali. Siano le quattro grandezze composte AB, AE, CD, CF proporzionali; vale a dire, sia, come AB ad AE, così CD a CF: io dico, che convertendole, rimarranno proporzionali; e per conseguente sarà, come AB a BE, così CD a DF. Imperciocchè, essendo dalla supposizione, come AB ad AE, così CD a CF sarà per la ragione per.

* pr.16. questo. *dimutata *, come la tutta AB alla tutta CD, così la parte tratta AE alla parte tratta CF; quindi per la proposizione ora dimostrata sarà la tutta AB alla tutta CD, così l'avanzo BE all'avanzo DF; e di*

* pr.14. questo. *dinuovo per la ragione permutata * sarà, come AB a BE, così CD a DF.*

Dimostrazione co' numeri.

30 . 10
18 . . 6
. . . . .
12. 4

Sia come 30 a 10, così 18 a 6: è manifesto, che l'avanzo 12 sia all'avanzo 4, come sta 30 a 10. Inoltre sia, come 30 a 10, così 18 a 6, è chiaro che ancorchè cotesti numeri si convertano, rimangono proporzionali; di fatto, come sta 50 a 20, così sta 18 a 12.

PROP. XX. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con altre grandezze si ritrovano essere in ragione ordinata, e sia la prima maggiore, eguale, o minore della terza, sarà parimente la quarta maggiore, eguale, o minore della sesta.

Sin-

I.

Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre grandezze D. E. F, e le tre prime paragonate coll' altre tre siano in ragione ordinata, vale a dire A sia a B, come D ad E; e B sia a C, come sta E ad F; io dico, che se la prima A è maggiore, è eguale, o è minore della terza C, ancora la quarta D è maggiore, eguale, o minore della sesta F. *FIG* 20.

II.

Mettasi I. che la A sia maggiore della C: quindi avrà A a B maggior ragione * di C a B: ma dalla supposizione A sta a B, come D ad E, per la ragione inversa * C sta a B, come F ad F; dunque avrà ancora D ad E maggior ragione di F ad E *: il perchè la grandezza D sarà maggiore della grandezza F. *pr.* 8. *di questo.* *Cor. del la pr.* 4. *pr.* 13. *di questo.*

Mettasi. II. che A sia eguale a C; quindi avrà A a B la medesima ragione * di C a B. ma A sta a B dalla supposizione, come D ad E, e per la ragion inversa * C sta a B, come F ad E: dunque come sta D ad E * così starà F ad E: il perchè le due grandezze D, ed ed F saranno eguali fra di loro* *pr.* 10. *di questo.*

Mettasi III. che A sia minore di C; quindi A avrà minor ragione a B di C a B; ma dalla supposizione A sta a B, come D ad E, e per la ragion inversa * C sta a B, come F ad E; dunque avrà D ad E minor ragione * di F ad E, e per conseguente sarà D minore di F *; ciocchè dovea dimostrarsi. *Cor. del la pr.* 13 *di questo* * *pr.* 14 *di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1 24. 12. 3	*Siano primieramente i tre numeri* 8, 4, 1 *in ragione ordinata co' numeri* 24 12 3, *è manifesto, che siccome* 8 *è maggiore di* 1, *così* 24 *è maggiore di* 3.
8 . 4 . 8 24 12. 24	
8 . 4. 16 24. 12 48	

Siano di più i tre numeri 8. 4. 8. *in ragione ordinata co' tre numeri* 24. 12. 24. *è chiaro, che siccome è uguale a* 8, *così* 24 *è eguale a* 24. *Finalmente siano i tre numeri* 8. 14. 16. *in ragione ordinata co' tre numeri* 24. 12. 48. *è manifesto, che siccome* 8 *è minore di* 16, *così* 24 *è minore di* 48.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con altre grandezze si ritrovano essere in ragione perturbata, e sia la prima maggiore, eguale, o minore della terza, sarà la quarta maggiore, eguale, o minore della sesta.

I.

FIG. 21. Siano tre grandezze A, B, C, tre e altre grandezze D, E, F, e le tre prime paragonate colle tre seconde costituiscano una ragione perturbata; vale a dire, come sta A a B, così E ad F, e come B a C, così sia D, ad E: io dico, che se *A* è maggiore, eguale, o minore di C, ancora D è maggiore, eguale, o minore di F.

II.

* *pr.* 8 *di questo.* Mettasi I. che A sia maggiore di C; quindi avrà A a B maggiore ragione * di C a B; ma dal-
* *Cor. del la pr.* 4. *di questo.* la supposizione, come sta A a B, così sta E ad F, e per la ragion inversa * C sta a B, come sta E a D: dunque la E alla F avrà pa-
* *pr.* 13. *di questo.* rimente * maggiore ragione di E alla D: e per seguente sarà D maggiore di F *.

* *pr.* 10. *di questo.* Mettasi II. che A sia eguale a C, quindi avrà A a B l'istessa ragione * di C a B: ma dalla sup-
* *pr.* 7. *di questo.* posizione la A sta alla B, come la E alla F: e per la ragion inversa la C sta alla B, come la E alla
* *pr* 11. *di questo.* D, dunque sarà parimente * E ad F, così E a D: il perchè le due D, ed F saranno eguali fra di loro *

* *pr.* 9. *di questo.* Mettasi III che A sia minore di C: quindi avrà A a B minor ragione di C, a B; ma dalla suppositio-

zione A sta a B come sta E ad F. [illegible] per la ragion inversa, come sta E a D; dunque avrà parimente E ad F minor ragione di E a D, perchè la grandezza D sarà minore della grandezza F *. Ciocchè dovea dimostrarsi:

* pr. 13. di questo.

* pr. 10 di questo.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1 16 . 4 . 2
8 . 4 . 4 16 . 32 . 16
8 . 4 . 16 16 . 64 . 32

Siano primieramente li tre numeri 8. 4. 1. *in ragion perturbata co' tre numeri* 16. 4. 2. *è manifesto, che siccome* 8 *è maggiore di* 1, *così* 16 *è maggiore di* 2: *siano di più i tre numeri* 8. 4. 8. *in ragione perturbata co' tre numeri* 16. 32. 16 *è chiaro che siccome il numero* 8 *è eguale a* 8; *così* 16. *è eguale al* 16. *Finalmente siano i tre numeri* 16. 64 32. *è chiaro, che siccome* 8. *è minore di* 16, *così* 16. *è minore di* 32.

PROP. XXII. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragione ordinata, sarà per l'egual cagione ordinata, come la prima alla terza, così la quarta alla sesta.

I.

Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre grandezze, D, E, F, e le tre prime paragonate colle tre seconde costituiscano una ragione ordinata, vale a dire, come sta A a B, così sta D ad E: e come sta B a C, così sta E ad F; io dico, che per l'egual ragione ordinata la prima A sarà alla terza C, come la quarta D alla sesta F. *FIG.* 22.

II.

Si prendano dalla prima A, e dalla quarta D, dalla seconda B, e dalla quinta E, dalla terza C

e dalle ... gli egualmente moltiplici, i quali siano G, ed L: H, ed M: K, ed N, e perchè dalla supposizione A sta a B, come sta D ad E e degli antecedenti A, e D sono stati presi gli egualmente moltiplici G, ed L, e de' conseguenti B ed E gli egualmente moltiplici H, ed M, sarà * G ad H, così L ad M. Inoltre, perchè dalla supposizione B sta a C, come sta E ad F, e degli antecedenti B, ed E sono stati pigliati gli egualmente moltiplici H, ed M, e de' conseguenti C ed E gli egualmente moltiplici K, ed N, sarà * H a K così M ad N; quindi le tre grandezze G, H, e K, paragonate colle altre tre L, M, ed N, costituiscono una ragione ordinata, essendosi dimostrato, che G ad H sia, come L a M, e che H sia a K, come M ad N: laonde, se G sia maggiore, eguale, o minore di K sarà ancora * L maggiore, eguale, o minore di N; il perchè avendo due ragioni di A a C, e di D ad F, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici G, ed L degli antecedenti A, e D pigliati ad arbitrio sono entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K, ed N presi ancora ad arbitrio; ne segue che le suddette due ragioni siano eguali *, e per conseguente, che A stia a C come sta D a F. Ciocchè dovea dimostrarsi.

pr. 4. di questo.

pr. 4. di questo.

pr. 10. di questo.

def. 6. di questo.

Altra dimostrazione.

Perchè da la supposizione A sta a B, come D ad E, sarà per la ragion permutata A a D, così B ad E. Similmente essendo dalla supposizione B a C, così E ad F, sarà per la ragion permutata, come B ad E, così C ad F: quindi, essendo così la ragione di A a D, come la ragione di C ad F eguale a quella di B ad E, saranno le dette due ragioni eguali fra loro, e per conseguente, come sta

A a D, così C ad F: e per la ragion permutata, come A a C, così D ad F; ciocchè dovea dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1	*Siano i tre numeri* 8. 4. 1. *in ragione ordinata cogli altri tre numeri* 16. 8. 2., *vale a dire, sia come* 8. *a* 4, *così* 16 *a* 8, *o come* 4 *a* 1, *così* 8 *a* 2: *è manifesto, che per l'egual ragione ordinata sarà, come* 8 *a* 1, *così* 16 *a* 2.
16 . 8 . 2	

PROP. XXIII. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragion perturbata, sarà per l'egual ragione perturbata, come la prima alla terza, così la quarta alla sesta.

I.

Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre D, E, F, le quali paragonate con quelle costituiscano una ragione perturbata, vale a dire, sia, come A a B, così E ad F, e come B a C, così D ad E; io dico, che per l'egual ragione perturbata sarà, come A a C, così D ad F. *FIG* 23.

II.

Si prendano dalla prima A, dalla seconda B, e dalla quarta D gli egualmente moltiplici G, H, ed L secondo qualsivoglia numero. Si prendano inoltre dalla terza C, dalla quinta A, e dalla sesta F gli egualmente moltiplici K, M, ed N parimente secondo qualsivoglia numero. Quindi essendo G ed H egualmente moltiplici delle parti A, e B, sarà, come A B * così G ad H: e per la medesima ragione, sarà E ad F, così M ad N; ma dalla supposizione, come sta A a B, così sta E ad F: dunque sarà parimente * come G ad H, così M ad N. Inoltre, perchè

* *pr.* 15. *di questo.*

* *pr.* 15. *di questo.*

chè dalla supposizione B sta a C, come D ad E egualmente moltiplici H, ed L degli antecedenti B, e D paragonati cogli egualmente moltiplici K, e M de' conseguenti C, ed E, si ritroveranno avere l'istessa proporzione *: vale a dire, come sta H a K, così starà L ad M, il perchè le tre grandezze G, H, e K paragonate colle altre tre L, M, ed N costituiranno una ragion perturbata, essendosi dimostrato, che G sia all' H; come M ad N, e che H sia a K, come L ad M: laonde, se * G sarà maggiore, eguale, o minore di K, ancora L sarà maggiore, eguale, o minore di N: avendo dunque due ragioni di A a C, e di D ad F, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici G, ed L degli antecedenti A, e D sono entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K, ed N de' conseguenti C, ed F; ne segue, che le suddette due ragioni siano eguali *, e per conseguente, che A sia a C, come sta D ad F: ciocchè dovea dimostrarsi.

*pr. 4. di questo.

*pr. 21. di questo.

*def. 6. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1
64 . 16 . 8

Siano i tre numeri 6. 4. 1. in ragion perturbata co' tre numeri 64. 16 8. vale a dire, sia come 8 a 4, così 16 a 8, e come 4 ad 1, così 64 a 16, è manifesto, che per l'egual cagione perturbata, sarà come 3 ad 1., così 64. ad 8.

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, e la quinta alla seconda abbia parimente la medesima ragione, che la sesta alla quarta: avrà ancora la composta dalla prima, e dalla quinta alla seconda la medesima ragione, che la composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta.

Ab-

I.

Abbia la prima AB alla seconda C la me- FIG. 33.
desima ragione, che la terza DE alla quarta F; ed abbia inoltre la quinta BG all'istessa seconda C la medesima ragione, che la sesta EH alla quarta F; io dico, che AG composta dalla prima, e dalla quinta abbia la medesima ragione a C, che la DH composta dalla terza, e sesta ha alla quarta F.

II.

Perchè dalla supposizione BG sta a C, come EH ad F, sarà per la ragion inversa * C a BG, così F ad EH: quindi le tre grandezze AB, C, e BG paragonate colle tre grandezze DE, F, ed EH costituiscono una ragione ordinata; imperciocchè si suppone, che AB sia a C, come DE ad F, e si è dimostrato, che C sia a BG, come F ad EH; il perchè per l'egual ragione ordinata * sarà come AB a BG, così DE ad EH: e per la ragion composta, come * AG a GB così DH ad HE: dunque le tre grandezze AG, GB, e C paragonate colle tre grandezze DH, HE, ed F ancora costituiscono una ragione ordinata: imperciocchè si è dimostrato, che AG sia a GB, come DH ad HE, e si è supposto, che GB sia a C, come EH ad F; dunque di nuovo per l'egual ragione ordinata ** sarà, come AG a C, così DH a F; ciocchè dovea dimostrarsi.

Cor. della pr. 4. di questo.

pr. 4. di questo.

pr. 17. di questo.

pr. 22. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

10 . 2 . 5 . 1 *Sia come* 10 *a* 2, *così* 5 *a* 1:
4 2 *e sia inoltre come* 4 *all'istesso* 2,
. . . . . *così* 2 *all'istesso* 2: *è manifesto*
14 . 2 . 7 . 1 *che come* 14 *sta a* 2, *così sta* 7 *a* 1.

PROP. XXV. TEOREMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali, la mas-

si-

sima di esse, e la minima unite insieme saranno maggiori delle altre due unite insieme.

I.

FIG. 25. Siano quattro grandezze AB, CD, E, ed F proporzionali, vale a dire, sia come AB a CD, così E ad F; io dico, che la massima AB, e la minima F sono maggiori delle altre due CD, ed E.

II.

* *pr.* 3. 1. *Si taglino le parti AG, CH* * *eguali rispettivamente alle due E, ed F*; e perchè dalla supposizione AB sta a CD, come E ad F, sarà parimente, come AB a CD, così AG a GH: quindi essendo la tutta AB alla tutta CD, così la parte tratta AG dalla * *pr.* 19. *di questo* parte tratta CH, sarà l'avanzo GB all'avanzo HD, così la tutta AB alla tutta CD, ovvero come AB a CD, così GB ad HD; e per * *pr.* 16. *di questo* la ragion permutata * come AB a BG; così CD a DH: ma dalla supposizione la prima AB è maggiore della terza CD; dunque * *pr.* 4. *di questo* sarà parimente * le seconda GD maggiore della quarta HD. Ora essendo AG eguale ad E, e CH eguale ad F, saranno le due AG, ed F unite insieme eguali alle due CH, ed E unite insieme * : il perchè aggiugnendo alle due prime la GB maggiore, ed alle due seconde la HD minore, riuscirà la somma delle due AB, ed F maggiore della somma delle due CD, ed E; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *ass.* 2.

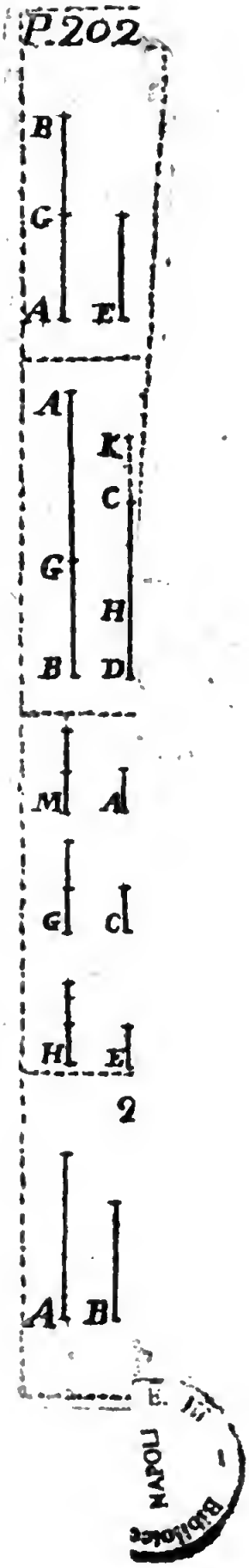
* *ass.* 4.

Dimostrazione co' numeri.

8 - 4 : 6 - 3 *Sia come* 8 *a* 4, *così* 6 *a* 3, *è manifesto, che la somma di* 8, *e* 3 *vale a dire del massimo numero, e del minimo è maggiore della somma degli altri due* 4. *e* 6.

L

P. 202



Biblioteca NAPOLI

Bibliothèque Nationale
NANCY

LIBRO SESTO.

I.

Le figure simili sono quelle, che hanno gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, ed intorno agli angoli eguali hanno parimente i lati proporzionali, ciascuno a ciascuno.

Spiegazione.

Acciocchè due figure possano chiamarsi simili, si ricercano tre condizioni. I. *Che siano pariangole. Quindi un triangolo potrà esser simile ad un altro triangolo, ma non già ad una figura quadrilatera, e multilatera. E similmente una figura quadrilatera potrà essere simile ad un'altra figura quadrilatera; ma non già ad una figura di più di quattro lati.* II. *Che ciascun' angolo sia eguale a ciascun' angolo.* III. *Che intorno gli angoli eguali abbiano i lati proporzionali: ove queste tre condizioni si rincontrino, le figure si diranno simili, ove una sola di esse non abbia luogo, le figure si diranno dissimili; da quì è manifesto, che tutt' i triangoli equilateri sono simili fra di loro, siccome parimente tutt' i quadrati; poichè negli uni, e negli altri si verificano tutte tre le condizioni.*

II.

Le figure reciproche sono quelle, fra i lati de' quali ha luogo tale proporzione, che gli estremi di essa s'incontrano in una figura, e i mezzi nell' altra figura.

Spie-

Spiegazione.

Per dirsi reciprochi i due triangoli ABF, DCE, fa duopo; I. che i lati dell' uno siano proporzionali a' due lati dell' altro. II. Che la proporzione sia tale, che gli estremi di essa si ritrovino in un triangolo, e i mezzi nell' altro triangolo: vale a dire, che sia AB a DC, così CE, BF; imperciocchè in tal modo gli estremi CE, BF della proporzione si ritrovano nel triangolo ABF, e li mezzi DC, CE si ritrovano nel triangolo DCE.

III.

L' altezza di una figura è la perpendicolare, che si fa cadere dal vertice sopra la base.

Corollario.

Quindi ne segue I. che due triangoli costituiti in modo che le basi di essi giacciano a dirittura, e i vertici siano riuniti in un medesimo punto, abbiano la medesima altezza; imperciocchè la perpendicolare, che cade dal vertice sopra la base è comune all' uno, ed all' altro triangolo. II. Che due figure situate fra due parallele hanno ancora la medesima altezza, la quale è la distanza delle due parallele, di maniera che è l' istesso il dire due figure hanno l' istessa altezza, e due figure sono costituite, e per lo meno possono essere costituite fra due parallele.

IV.

Una linea retta dicesi segata secondo l'estrema e mezza ragione, quando tutta la linea retta è alla di lei maggior porzione, come l'istessa maggior porzione sta alla minor porzione: ——————— *vale a dire la retta AB si dirà segata nel punto C, ACB secondo l' estrema, e men-*

mezza ragione, siccome sta AB ad AC, così sta AC a CB.

V.

La quantità di ragione è il quoziente, che nasce dividendo il suo antecedente per lo suo conseguente: dicasi detto quoziente ancora, denominatore della ragione, ovvero esponente della ragione.

Spiegazione.

La ragione, secondo quello, che si disse nel principio del libro V. è il rapporto di due grandezze omogenee paragonate secondo la quantità. Ora, chi vuol sapere il valore di una ragione, il qual valore si chiama da' Geometri quantità, *o* esponente, *o* denominatore, *egli dee vedere, quante volte l'antecedente contiene il conseguente, o che ritorna all' istesso, quante volte il conseguente si contiene nell' antecedente; imperciocchè il numero, che indica cotesta continenza sarà il valore della ragione, e si chiamerà* quantità *della medesima; quindi la quantità della ragione di 8 a 4 sarà 2. imperciocchè dividendo il numero 8 per lo 4 ne nasce il numero 2, la quantità della ragione di 13 a 2 è:*

$6\frac{1}{2}$ — *imperciocchè il 2 nel 13 entra* $6\frac{1}{2}$ —

è finalmente la quantità della ragione di 2 a 3

e $\frac{2}{3}$ — *imperciocchè* $\frac{2}{3}$ — *è il quoziente della divisione dell' antecedente 2 per lo conseguente 3.*

Questa definizione ci suggerisce un' altro contrassegno per conoscere se due ragioni sono eguali o no, il quale è questo: Se la quantità delle due ragioni, *sopra le quali nasce il dubbio, se siano eguali, o no,* sono eguali, le ragioni saranno parimente eguali: ma se le suddette quantità sono disuguali

le

le ragioni ancora saranno disuguali, e quella ragione sarà maggiore la quantità della quale è maggiore; *Per mezzo di questo contrassegno conosciamo, che* 12 *sta a* 2, *come* 18 *a* 3, *imperciocchè la quantità dell' una e dell' altra ragione è il numero* 6 *Conosceremo di più, che* 2. *sta a* 6, *come sta* 4 *a* 12, *imperciocchè la quantità dell' una, e dell' altra ragione è* $\frac{1}{3}$. *Finalmente conosceremo, che* 12 *ha maggior ragione a* 3, *che* 6 *a* 2, *imperciocchè la prima ragione ha* 4 *per denominatore, ovvero esponente, e la seconda ha* 3.

VI.

Una ragione dicesi composta da più altre ragioni, quando la quantità di essa nasce dal moltiplicare insieme tutte le quantità delle ragioni componenti.

VII.

Se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta dices duplicata; se sono tre, e sono eguali, dicesi triplicata; se sono quattro, e sono eguali, quadruplicata; e cosa all' infinito.

Spiegazione.

Si è detto nella definizione antecedente, che due ragioni allora sono eguali, quando le loro quantità sono eguali fra di loro, ma se la quantità di una ragione fosse eguale alla quantità di più altre ragioni moltiplicate insieme, in tal caso la suddetta ragione si direbbe composta da tutte queste ragioni. Per esempio la ragione di 6 *a* 1 *è composta dalle ragioni di* 12 *a* 4, *e* 6 *a* 3, *imperciocchè le quantità delle due ultime ragioni sono rispettivamente* 3, *e* 2, *le quali moltiplicate insieme producono il numero*

mero 6, *che è la quantità della ragione di* 6 *a* 1. *Similmente la ragione di* 12 *a* 1 *è composta da queste tre ragioni di* 6 *a* 2, *di* 8 *a* 4, *e di* 10 *a* 5, *imperciocchè le quantità delle tre ultime ragioni sono rispettivamente* 3, 12, *e* 2, *le quali moltiplicate insieme producono il numero* 12, *che è la quantità della ragione di* 12 *a* 1.

Quindi date più ragioni semplici sarà facile a ritrovare la ragione, che da esse è composta, imperciocchè non si dee far altro, che ritrovare primieramente le quantità di tutte le ragioni semplici date, e poi moltiplicarle insieme, che poi la ragione, che ha il prodotto per esponente, ovvero per denominatore sarebbe la ragione composta desiderata. Vogliasi per esempio ritrovare la ragione composta da queste due ragioni di 18 *a* 3, *e di* 4 *a* 1, *perchè la quantità di queste due ragioni sono rispettivamente* 6, *e* 4, *le quali moltiplicate insieme producono il numero* 24, *ne segue, che la ragione di* 24 *a* 1, *ovvero di* 48 *a* 2, *ovvero di* 72 *a* 3, *ecc. è composta dalle due ragioni semplici date, imperciocchè la quantità di ciascuna di queste tre ragioni semplici date, moltiplicando insieme tutti gli antecedenti della ragione, e poi tutti i conseguenti delle medesime, e da prodotti costituirne un'altra ragione, la quale sarà la composta desiderata. Così senza appartarci dall' esempio ora proposto, perchè gli antecedenti delle due ragioni sono* 24, *e* 4, *il prodotto delle quali è* 72, *e i conseguenti sono* 3, *ed* 1, *il prodotto de' quali è* 3, *ne segue, che la ragione di* 72 *a* 3 *è composta dalle due ragioni di* 18 *a* 3, *e di* 4 *a* 2, *siccome già era stato ritrovato per l' altra maniera di comporre le ragioni.*

Ora è da sapersi, che se le ragioni componenti sono due, e sono eguali; la composta si chiama duplicata, *in riguardo a ciascuna delle due componenti, e se sono tre, e sono eguali, si chiami* tripli-

plicata, *e se quattro, e sono eguali* quadruplicata, *e così all' infinito. Per esempio le ragioni di* 6 *a* 2, *e* 12 *a* 4 *sono eguali, sicchè la ragione di* 9 *a* 1 *composta da esse, si dirà duplicata, così di* 6 *a* 2, *come parimente di* 12 *a* 4. *Similmente le ragioni di* 4 *a* 2, *di* 8 *a* 4. *e di* 12 *a* 6 *sono eguali: il perchè la ragione di* 8 *a* 1 *composta da tutte tre si dirà triplicata di ciascuno di esso. In fine le ragioni di* 3 *a* 1, *di* 6 *a* 2, *di* 9 *a* 3, *e di* 12 *a* 4 *sono tutte eguali, quindi la ragione di* 3 *a* 1 *composta da tutte quattro si dirà quadruplicata di ciascuna di esse. Del rimanente siccome per darsi luogo alla ragione duplicata si richiedono due ragioni eguali; per darsi luogo alla triplicata si richiedono tre ragioni eguali, e così all' infinito; così basterà una ragione sola per ritrovarne la duplicata, ecc.: imperciocchè non avrà da farsi altro, che moltiplicare una volta per se medesima la quantità della ragione data per ritrovare la sua duplicata, moltiplicarla due volte per avere la triplicata, tre volte per avere la quadruplicata, e così all' infinito.*

Intorno le ragioni composte è degno, che quì si riferisca il seguente Teorema. Se fra due qualsivogliano quantità omogenee si mettano altre qualsivogliano quantità omogenee, e quante si vogliano, la ragione, che la prima ha all' ultima sarà composta da tutte le ragioni intermezze: *vale a dire se fra le quantità* 10, *e* 1 *si frappongono le quantità* 10, *e* 5, *le quali si prendano ad arbitrio, la ragione di* 20 *a* 1 *sarà composta dalle ragioni intermezze di* 20 *a* 10, *di* 10, *a* 5, *e di* 5 *a* 1; *di fatto componendo insieme queste tre ragioni semplici si vedrà uscir fuori la composta di* 10 *a* 1. *Similmente se fra le quantità* 2, *e* 3 *si frappongono ad arbitrio le quantità* 5, *e* 8, 30, *e* 4; *la ragione di* 2 *a* 3.

sarà

sarà composta da tutte le ragioni intermezze di 2 a 5, di 5 a 8, di 8 a 30, di 36 a 4, e di 4 a 5: di fatto componendo insieme tutte queste ragioni si vedrà uscir fuori la composta di 2 a 3; ma avvertasi quì, che per fare questa composizione fa duopo sapere la teoria de' numeri retti.

Da quì è manifesto; I. Che se tre quantità A, B, C, sono continuamente proporzionali, la ragion della prima A alla terza C è duplicata della prima A alla seconda B, imperciocchè fra A, e C ritrovandosi interposta la B, sarà la ragione di A a C composta dalle ragioni di A a B, e di B a C; ma queste due ragioni sono supposte eguali fra loro; dunque la ragion di A a C sarà duplicata di A a B, e per conseguente di B a C; II. Che se quattro quantità A B, C, D sono continuamente proporzionali, la ragione della prima alla quarta D, sia triplicata della prima alla quarta D, sia triplicata della ragione della prima A alla seconda B, imperciocchè fra le due grandezze A, e D ritrovandosi interposte le due grandezze B, e C, sarà la ragione di A a D composta dalle tre ragioni intermezze di A a B, di B a C, e di C a D, quindi supponendosi eguali queste tre ragioni, sarà la ragione di A a D triplicata, così della ragione di A a B, come delle ragioni di B a C, e di C a D: nell' istessa maniera si mostrerà, che se cinque quantità sono continuamente proporzionali, la ragione della prima alla quinta sia quadruplicata della ragione della prima alla seconda.

PROP. I. TEOREMA.

I triangoli, che hanno l' istessa altezza sono fra loro come le basi. Similmente li parallelogrammi, che hanno l' istessa altezza sono fra loro, come le basi.

FIG. 1. I due triangoli ABC, ADC siccome anco. ra li due parallelogrammi ACBE, ACDF abbiano la medesima altezza: io dico, che il triangolo ABC stia al triangolo ADC: come sta la base B alla base DC; dico di più, che il parallelogrammo ACBE stia al parallelogrammo ACDE come sta l'istessa base BC alla base DB.

II.

*dim. 2, *pr. 3. I. *Si distendano* * *le basi BC, DC verso H ed I. Si prendano* * *le parti DG, GH ciascuna eguale alla BC, il numero delle quali parti sia arbitrario; siccome ancora si prenda la parte DI eguale a CD.*

*dim. 1. *Si congiungano* * *le linee rette AG, AH, AI.*

III.

I. Perchè dalla costruzione le basi HG, GB, BC *pr. 37. I. sono eguali fra di loro, saranno * i triangoli AHG AGB, ABC eguali fra di loro; il perchè, quanto la base CH è moltiplice della base CB, tanto sarà il triangolo AHC moltiplice del triangolo ABC. Similmente, perchè dalla costruzione le basi ID, DC sono eguali fra di lo- *pr. 37 I. ro, saranno li triangoli * AID, ADC parimente eguali, e per conseguente quanto la base IC è moltiplice della base DC, altrettanto il triangolo AIC sarà moltiplice del triangolo ADC. Ora, se la base HC è eguale alla base CI, *pr. 37. I. è manifesto *, che il triangolo AHC sarà eguale al triangolo AIC: ma è manifesto ancora, che se la base HC è maggiore, o minore della base IC, ancora il triangolo AHC sarà maggiore, o minore del triangolo AIC. Quindi, avendo due ragioni di BC a CD, e del triangolo ABC al triangolo ADC; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti BC, e del triangolo ABC, i quali egualmente moltiplici,

so-

sono HC ; ed il triangolo AHC sono entrambi maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici CI e del triangolo AIC de' conseguenti DC, e del triangolo ADC ; ne segue * che le suddette due ragioni siano eguali ; e per conseguente, che BC stia a CD, come sta il triangolo ABC al triangolo ADC. *def 6.

II. Perchè il parallelogrammo * ACBE è doppio del triangolo ACB, siccome parimente il parallelogrammo ACDF è doppio del triangolo ACD, saranno i due parallelogrammi ACBE, ACDF egualmente moltiplici de' triangoli ACB, ACD ; quindi, come sta il triangolo ABC al triangolo ACD *, così starà il parallelogrammo ACBE al parallelogrammo ACDF ; ma si è dimostrato che la base BC sia alla base DC, come il triangolo ABC al triangolo ADC, dunque sarà parimente * la base AC alla base DC, così il parallelogrammo ACBE al parallelogrammo ACDF. Cioc- chè dovea dimostrarsi. *pr. 34. I. *pr. 15. V. *pr. 12. V.

PROP. II. TEOREMA.

Se in un triangolo s' intende tirata una linea retta qualunque parallela alla base, essa segherà i lati proporzionalmente. Viceversa, se i lati di un triangolo siano segati proporzionalmente, la linea retta, che congiugne i segamenti sarà parallela alla base.

I.

Nel triangolo ABC intendasi tirata la linea DE parallela alla sua base BC ; io dico in primo luogo, che i lati AB, AC. rimangono segati proporzionalmente, di modochè, come sta BD a DA, così starà CE ad EA ; dico inoltre, che se BD sta a DA, come CE ad EA, la linea DE, la quale congiugne i punti D, ed E sarà parallela alla base BC del triangolo ABC. FIG 2.

II.

*dim.1. *Congiungansi le due linee rette DC, BE* *,

III.

*pr.37.I. I. Perchè dalla supposizione le rette DE, BD
*pr.7.V. sono parallele, saranno * li triangoli BDE, CED eguali fra di loro, quindi, come sta il triangolo BDE al triangolo ADE, così starà il triangolo CED all' istesso triangolo ADE: ma il
*pr.ant. triangolo BDE sta al triangolo ADE * come la base BD alla base DA: e similmente al
*pr.ant. triangolo CED sta al triangolo ADE * come la ba CE alla base EA; dunque sarà pari-
*p.11.V. mente BD a DA *, così la CE alla EA.

II. Perchè dalla supposizione BD sta a DA come CE ad EA, ed oltre a ciò l' istessa BD
*pr.ant. sta a DA, * come il triangolo BDE sta al triangolo ADE, e CE sta ad EA, come il
*pr.11.V. triangolo BED al triangolo ADE, sarà * il triangolo CED al triangolo ADF, come il triangolo BDE al triangolo ADE: quindi i due triangoli BDE, CED avendo la medesima ragione all' istesso triangolo ADE saranno
*pr.9.V. eguali fra di loro * : ma sono costituiti sopra la medesima base DE: dunque saranno fra
*pr.39.I. le medesime parallele *; e per conseguente sarà la BC parallela alla DE: ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollarj.

Da quì è manifesto: I. Che AD sia a DB, come AE ad EC; imperciocchè essendosi dimostrato, che BD sta a DA, come CE ad EA, sarà per la rag o-
*Corol-la pr.4. *ne inversa *, come AD a DB, così AE, ad EC; II. Che BA sta ad AD, come CA ad EC; imperciocchè essendosi dimostrato che BD sia DA come CE*
*pr.18.V. *ad EA; sarà per la composizione della ragione *, come BA ad AD, così GA ad AE; III. Che AB sta a BD, come AC a CE; imperciocchè essendosi di-*

*dimostrato, che AB sia a DB, come sta AE ad EC, sarà per la composizione della ragione *, come AB a BD così AC a CE.* *pr. 11. V.

PROP. III. TEOREMA.

Se l'angolo contenuto da' lati di un triangolo s'intenda diviso per mezzo, la linea, che lo divide segherà la base nell'istessa proporzione de' lati. Viceversa, se la base sia segata nell'istessa proporzione de' lati, la linea, che unisce il vertice del triangolo col punto della sezione, segherà il suddetto angolo per mezzo.

I.

Nel triangolo ABC intendasi l'angolo BAC diviso per mezzo dalla retta AD: io dico primieramente, che questa retta segherà la base BC nel punto D, in modochè le parti di essa sono proporzionali a' lati BA, AC; vale a dire, come va BA ad AB così starà BD a DC. Io dico inoltre, che se BD sta a DC, come BA ad AC, la linea AD, la quale congiunge il vertice A del triangolo col punto della sezione D, divida l'angolo BAG per mezzo. *FIG.* 3.

II.

*Distendasi * la retta BA verso E.* *dim. 3.
*Si tagli la parte AE eguale * alla AC.* *pr. 3. I.
*Si congiunga la CE *.* *dim. 1.

III.

I. Perchè dalla costruzione la AE è eguale alla AC, sarà il triangolo ADC isoscele: il perchè l'angolo * AEC sarà eguale all'angolo ACE; laonde essendo l'angolo esteriore BAC eguale * a' due angoli interiori opposti AEC, ACE; sarà l'angolo BAC doppio dell'angolo ACE: quindi essendo dalla supposizione l'angolo BAC parimente doppio dell'an-

*pr 5 I.

*pr. 32 I.

golo DAC ; saranno * li due angoli DAC , AGE eguali fra di loro : ma sono alterni delle linee AD , GE dunque queste due linee saranno parallele *. Ciò posto , perchè nel triangolo BCE si è tirata la retta DA parallela alla base GE ; sarà * BA ad AE , così BD a DC ; quindi , essendo dalla costruzione la AC eguale alla AE ; sarà ancora come BA , ed AC , così BD a DC.

* *ass* 7.
* *pr.* 27.
* *Cor.* 1. *della pc. antec.*

II. Essendo dalla supposizione BA ad AC , così BD a DC : e dalla costruzione essendo la AE eguale alla AC , sarà , come BA ad AE , così BD a DC : quindi la linea retta AD che unisce i punti A , e D , sarà parallela * alla base DE , il perchè sarà in primo luogo l'angolo esteriore BAD * eguale all'interiore opposto ACE : e sarà ancora l'angolo DAC eguale al suo alterno ACE * ; ma gli angoli ACE , AEC sono eguali fra di loro , perchè * dalla costruzione la AE è eguale alla AC : dunque saranno parimente eguali gli angoli BAC , DAC * ; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* *ant.*
* *pr.* 29. *I.*
* *pr.* 29. *I.*
* *pr.* 5. *I.*
* *ass. I.*

PROP. IV. TEOREMA.

Se due triangoli sono equiangoli , i lati intorno gli angoli eguali saranno proporzionali , e quei lati saranno omologi , i quali stanno dirimpetto agli angoli eguali.

I.

4. I due triangoli ABC , DCE siano equiangoli , vale a dire siano gli angoli BAC , ABC ; BCA del primo triangolo eguali rispettivamente agli angoli CDE , DCE , CED dell'altro triangolo , ciascuno a ciascuno ; io dico , che li lati intorno a' suddetti angoli eguali sono proporzionali , prendendo però per li lati omologi quelli , che stanno dirimpetto agli angoli eguali , cioè *AB* , e CD :

e CD, BC, e CE, AC, DE; di modochè sarà AB, a BC, come DC a CE, e come BC CA, così CE ad ED, e finalmente come BA, a CA, così CD a DE.

II.

Si mettono i due lati omologi BC, e CE a diritura.

Si distendano i due lati BA, ED, finchè vadano a congungersi nel punto F. * *dim.* 1.

III.

Poichè dalla supposizione l'angolo esteriore ACB è eguale all' interiore opposto dall' istessa parte FEB, e le due linee rette AC, FE saranno parallele*. Similmente perchè della sup- * *pr.* 28. posizione l'angolo esteriore DCE è eguale all' angolo interiore opposto FBC, le due linee DC, FB saranno * paral ele; quindi la figura, * *pr.* 28. *I.* quadrilatera FACD avendo i lati opposti paralleli, sarà un parallelogrammo *; e per con- **def* 35. *I.* seguente i lati opposti AC, ED; ed AF, CD saranno eguali fra di loro *. Ora, perchè nel * *pr.* 34. *I* triangolo FBE la linea AC è parallela alla base FE, sarà BA ad AF, così BC a CE*, e per * *pr.* 2. *di* conseguente sarà ancora BA a CD, come BC *questo.* a CE, e per la ragione permutata*, come * *pr.* 16. *V.* BA a BC, così CD a CE. Similmente, perchè nel triangolo EFB la linea CD è parallela alla base BF, sarà, BC a CE, così FD a * *pr.* 2. *di* DE, e per conseguente BC a CE, come AC *questo* a DE, e per la ragion permutata, come FC *pr.* 16. *V.* a CA, così CE ad ED. Ora essendosi dimostrato, che AB sia a BC, come DC a CD, e che BC sia a CA, come CE ad ED, saranno le tre linee AB, BC, CA in ragion ordinata colle tre linee DC, CE, ED; e per conseguente per l'egual ragione ordinata sarà come* BA ad AC, così CD, a DE; ciocchè * *pr.* 22. *V.* dovea dimostrarsi.

Corollario.

Da quì è manifesto 1. che se due triangoli sono equiangoli, essi sono parimente simili; imperciocchè acciocchè siano simili, si richiede, che gli angoli siano eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e i lati intorno gli angoli eguali sono proporzionali, ora la prima di queste due condizioni si suppone; e l'altra è una conseguenza necessaria della prima II. Che se nel triangolo FBE si tira la retta AC parallela alla base FE, il triangolo ABC sia simile al triangolo FBE, imperciocchè a cagione delle due parallele AC, FE, l'angolo BAC è eguale all'an-

* *pr.* 19. I. *golo* * *BFE, e l'angolo BCA è eguale all'angolo BEF, quindi essendo di più l'angolo ABC comune all'uno, ed all'altro triangolo; saranno essi equiangoli, e per conseguente saranno simili.*

PROP. V. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i lati proporzionali, saranno equiangoli, e quegli angoli saranno eguali, i quali stanno dirimpetto a' lati omologi.

I.

FIG. 5. I due triangoli ABC, DEF abbiano i lati proporzionali: vale a dire; come sta AB a BC, così sia DE ad EF; come BC a CA, così EF a FD, e come BA ad AC, così ED a EF: io dico, che gli angoli del triangolo ABC sono eguali agli angoli del triangolo DEF, ciascuno a ciascuno, e quelli propriamente, i quali vanno dirimpetto a' lati omologi; vale a dire l'angolo ABC all'angolo DEF, l'angolo BCA all'angolo EFD, e l'angolo BAC all'angolo EDF.

II.

* *pr.* 23. I. *Costituiscansi* * *gli angoli GEF, GFE eguali rispettivamente agli angoli ABC, ACB.*

Si

Si distendano le due linee rette EG, FG, finchè vadano ad unirsi nel punto G . * dim. 2.*

III.

Perchè dalla costruzione li due angoli ABC, ACB sono eguali rispettivamente agli angoli GEF, GFE; sarà il rimanente angolo BAC eguale al rimanente angolo EGF, perchè in ogni triangolo li tre angoli * sono eguali a'* due retti. Quindi li triangoli ABC, GEF essendo equiangoli *, avranno i lati proporzionali, e per conseguente sarà AB a BC; così GE ad EF; ed AC a CB, così GF ad FE; ma dalla supposizione AB sta a BC, come DE ad EF, e per la ragione inversa *, come AC* a CB, così DF ad EF; dunque sarà ancora GE ad EF, come DE ad EF, e GF ad FE così DF ad FE *: laonde, così le due linee rette GE, FD; come le due GF, FD saranno* eguali fra di loro, a cagione che hanno la medesima ragione alla terza EF *: quindi i due* triangoli DEF, GEF avendo i due lati DE, DF eguali a' due lati GE, GF, ciascuno a ciascuno, ed avendo di più la base EF comune, avranno * gli angoli eguali agli angoli: vale a dire, sarà l'angolo EDF eguale all' angolo EGF, l' angolo DEF eguale all' angolo GDF, e l' angolo DEF eguale all' angolo GFE: ma li tre angoli EGF, GEF, GFE sono dalla costruzione eguali a' tre angoli BAC, ABC ACB: dunque saranno ancora gli angoli del triangolo DEF eguali * agli angoli del triangolo * ABC: ciocchè dovea dimostrarsi.

pr. 32 I. *pr. ant.* *Cor. della prop. 4. del V.* *pr. 11 V.* *pr 8 V.* *ass. 1.*

Carollario.

Da quì è manifesto, che se due triangoli hanno i lati proporzionali, essi sono simili imperciocchè, acciocchè siano simili si richiede, che gli angoli siano

no eguali agli angoli ciascuno a ciascuno, e di più, che i lati intorno gli angoli eguali siano proporzionali. Ora la seconda condizione si suppone, e la prima è una conseguenza necessaria della seconda. Questa proposizione è conversa dell' antecedente.

PROP. VI. TEOREMA.

Se due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo, e i lati intorno questi angoli proporzionali, essi saranno equiangoli, e quegli angoli propriamente saranno eguali, i quali stanno dirimpetto a' lati omologi.

I.

FIG. 5. Abbiano i due triangoli ABC, DEF, l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, ed abbiano di più i lati intorno questi angoli eguali proporzionali; vale a dire; sia come AB a BC; così DE ad EF; io dico, che gli altri due angoli del primo triangolo sono eguali agli altri due angoli del secondo triangolo, e quelli propriamente che stanno dirimpetto a' lati omologi, cioè l'angolo BAC è eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB è eguale all'angolo DFE.

II.

*pr. 52. I. *Costituiscansi* * gli angoli GEF, GFE eguali rispettivamente agli angoli ABC, ACB*

* dim. 2. *Si distendano* * le linee rette GE, DE, finchè si vadano ad unire nel punto G.*

III.

Perchè dalla costruzione li due angoli ABC, ADB sono eguali a' due angoli GEF, GFE, sarà il rimanente angolo BAC eguale al rimanente angolo EGF: poichè in ogni triangolo tutti li tre angoli sono eguali a' due retti * pr. 32. *: il perchè li due triangoli ABC, GEF essendo equiangoli, avranno* * pr. 4 di questo i lati proporzio-

zionali, e per conseguente sarà AB a BC, così GE ad EF; ma dalla supposizione AB sta a BC, come DE ad EF: dunque sarà ancora GE ad EF, così DE alla medesima EF; laonde le due rette GE, DE saranno eguali fra di loro *; quindi i due triangoli DEF, GEF, avendo i due lati DE, EF eguali a due lati GE, EF ciascuno a ciascuno, ed avendo di più l'angolo DEF eguale all'angolo GEF, perchè ciascuno di essi è eguale al medesimo angolo ABC, sarà * l'angolo EDF eguale all'angolo EGF, e l'angolo EFD eguale all'angolo EGF,EFG; ma dalla costruzione gli angoli EGF, EFG sono eguali rispettivamente agli angoli BAC, BCA; dunque ancora gli angoli EDF, EFD saranno rispettivamente eguali agli angoli BAC, BCA; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* 11. *V.*

* *pr.* 9. *V.*

* *pr.* 4. *I.*

Corollario.

*Da quì è manifesto, che se due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo, e i lati intorno questi angoli proporzionati, essi sono simili; imperciocchè si è dimostrato, che i medesimi triangoli sono equiangoli, e per conseguente * sono simili.*

* *Cor.* 1 *della pr* 4 *di questo.*

PROP. VII. TEOREMA.

Se due triangoli hanno I. un angolo eguale ad un angolo II. intorno due altri angoli hanno i lati proporzionali III. hanno i rimanenti angoli della medesima specie, vale a dire tutte due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottusi, i triangoli saranno equiangoli, e propriamente saranno eguali i due angoli, intorno i quali i lati sono proporzionali.

I.

Abbiano i due triangoli ABC, DEF primieramente i due angoli BAC, EDF eguali, *FIG.* 7.

in

in secondo luogo intorno gli angoli ABC, DEF abbiano i lati proporzionali; vale a dire, sia come AB a BC, così DE ad EF: finalmente siano gli angoli AIDB, DFE della medesima specie, vale a dire tutti due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottusi; io dico, che li suddetti triangoli ABC, DEF saranno equiangoli, e sarà l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB, eguale all angolo DFE.

II.

Se mai è possibile non sia l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, ma sia maggiore.

* *pr.* 3. *Costituiscasi dunque* * *l'angolo ABC eguale all'angolo DEF.*

III.

Perchè dalla supposizione l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF, e dalla costruzione l'angolo ABC è eguale all'angolo DEF, sarà l'angolo rimanente AGB eguale all'angolo rimanente DEF: quindi li triangoli ABC, DEF, essendo equiangoli, avranno * i lati intorno gli angoli eguali proporzionali, e per conseguente sarà AB a BG, così DE ad EF: ma dalla supposizione AB sta a BC, come DE ad EF: dunque sarà parimente * AB a BG, così la medesima AB a BC: e perciò le due rette BG, BC alle quali la AB ha l'istessa ragione saranno eguali; * quindi il triangolo BGC sarà isoscele, e per conseguente gli angoli BCG BGC saranno * eguali.

* *pr.* 4. *di questo.*

* *pr.* 11.

* *pr.* 9. *V.*

pr. 5. *I.*

Ciò premesso, se l'angolo BCG è retto, ovvero ottuso, il triangolo BCG verrebbe ad avere due angoli retti, ovvero due angoli ottusi, il che non può sussistere. Ma se l'angolo BCG si mette acuto, essendo ancora acuto l'angolo BGC, sarà ottuso l'angolo AHB,

per.

perchè li due angoli BGC, AGB sono eguali a' due retti *: e per conseguente sarà ancora ottuso l' angolo DFE, il quale è eguale all' angolo AGB, ma nel supposto, che l' angolo ACB sia acuto, ancora l' angolo DFE, il quale è dell' istessa specie è acuto: dunque l' angolo DFE è nell' istesso tempo ottuso, ed acuto; ciocchè non potendo sussistere, rimane vero il Teorema in quistione. * pr. 3. I.

Corollario.

Da quì è manifesto, che se due triangoli hanno due angoli; hanno di più intorno due altri angoli i lati proporzionali, ed hanno finalmente i rimanenti angoli dell istessa specie, li suddetti triangoli saranno simili.

PROP. VIII. TEOREMA.

Se in un triangolo rettangolo si fa dall' angolo retto cadere una perpendicolare sopra la base, essa dividerà il triangolo in due triangoli I. Simili fra loro: II. Simili a tutto il triangolo rettangolo.

I.

Nel triangolo rettangolo ABC si faccia dell' angolo retto A cade e la perpendicolare AD sopra la base BC; io dico, che essa divide il triangolo in due triangoli ADB, ADC, li quali sono simili fra loro, e sono dippiù simili a tutto il triangolo ABC. FIG. 2.

II.

I. Il triangolo ABD è equiangolo al triangolo ABC; imperocchè l' angolo in C è comune all' uno, ed all' altro triangolo, l' angolo ADB è eguale all' angolo BAC, perchè entrambi sono retti, e l' angolo rimanente BAD è eguale all' angolo rimanente BCA: quindi i suddetti due triangoli saranno simili *. * Cor. 1. della pr. 4. di questo.

II. Il triangolo ADC è equiangolo al trian-

golo ACB; imperciocchè l'angolo in C è comune all' uno, e all'altro triangolo, l'angolo ADC è eguale all'angolo CAB, perchè entrambi sono retti, e l'angolo rimanente CAD è eguale all'angolo rimanente CBA: quindi li suddetti due triangoli saranno simili *.

*Cor. della pr. 4. di questo.

III. Finalmente il triangolo *ADB* è equiangolo al triangolo *ADC*, perchè gli angoli *ADB*, *ADC* sono eguali, essendo entrambi retti: gli angoli BAD, ACD si sono dimostrati eguali, e si sono ancora dimostrati eguali, i rimanenti angoli ABD, CAD: quindi i suddetti due triangoli saranno simili.

* Cor del la pr. 4. di questo

Corollarj.

Quindi perchè li triangoli simili hanno intorno gli angoli i lati proporzionali, e que' lati sono omologi, li quali stanno dirimpetto agli angoli eguali sarà I. per ragione de' triangoli ABC, ABD, li quali si sono dimostrati simili, come CB a BA così BA a BD; vale a dire il lato BA sarà mezzo proporzionale fra l'ipotenusa BC, e la parte adjacente BD: II. Per ragione de' triangoli BCA, ACD li quali si sono dimostrati parimente simili sarà, come BC a CA, così CA a CD; vale a dire l'altro lato CA sarà mezzo proporzionale fra l'ipotenusa BC, e la parte adjacente CD: III. Per ragione de' triangoli BDA, ADC, li quali si sono dimostrati simili, sarà come BD a DA, così DA a DC; vale a dire la perpendicolare DA sarà mezzo proporzionale fra le parti BD, DC dell'ipotenusa BC.

PROP. IX. PROBLEMA.

Da una linea retta data tagliarne una parte ordinata.

I. Sia

I. Sia data la linea retta AB; fa duopo ta. FIG 9.
gliarne una parte ordinata, come per esempio la terza parte.

II.

Dal punto A si tiri ad arbitrio la retta indefinita AC, la quale comprenda colla data AB l'angolo CAB.

*Prendasi nella AC il punto D ad arbitrio. Si taglino * le parti DE, BF eguali ciascuna ad AD.* * pr.3.I.

*Si congiunga * la FB.* * dim.1.

*Per lo punto D si tiri * la retta DG parallela alla* FB; io dico, che AG sia la terza parte della AB. * pr.31.I.

III.

Siccome dalla costruzione la DG è parallela alla FB, così sarà * FA ad AD, come BA ad AG: ma dalla costruzione la FA è tripla della AD, dunque sarà parimente la BA tripla della AG, e per conseguente sarà la AG la terza parte della AB. Ciocchè dovrà farsi. * Cor.2. della pr. 2. di questo.

PROP. X. PROBLEMA.

Date due linee rette, l'una divisa in molte parti ad arbitrio, l'altra indivisa, segare l'indivisa nell'istesso modo, che si ritrova segata la linea retta divisa.

I.

Sia data la linea retta AB divisa nelle parti *AF*, *FG*, *GB*; e sia data di più la linea retta *AC* indivisa, fa duopo segare cotesta retta indivisa in altrettante parti, le quali siano proporzionali alle parti *AF*, *FG*, *GB* dalla retta divisa *AB*. FIG.

II.

Si congiungano le due rette date AB, AC,

in

in modo che formino un angolo ad arbitrio, come ABC.

* *dim.* 1. *Si congiunga* * *la retta BC.*

* *pr.*31.I. *Per li punti E, e G si tirino* * *le linee rette* FD GE *parallele a BC.* Io dico, che la retta AC rimane divisa ne' punti *D*, ed E nell' istesso modo, che la data AB è segata ne' punti F, e G: vale a dire; come sta AF ad FC, così AD a DE, e come FC a GB, così DE ad EC, e come AG a CB, così AE ad EC, e come AF, così AD a DC.

III.

* *pr.*31.I. *Per lo punto D tirisi la DH* * *parallela alla AB*: ciò fatto, le due figure quadrilatere DFGI, IGBH saranno parallelogrammi; il * *pr* 34.I. perchè sarà così la DI eguale alla FC * come a IH eguale alla GB. Nel triangolo AGE, essendo tirata la FD parallela alla base GE * *Cor.* 1, *della pr.* 2. *di questa.* sarà* AF ad EG, così AD a DE. Inoltre, nel triangolo DHC, essendosi tirata la EI parallela alla base CH, sarà ad ID, ovvero FG a GB così DE ad EG. Di più nel triangolo ABC, essendosi tirata la GE parallela alla base BC, sarà la AG alla GB, così la AE alla EC. Finalmente nell' istesso triangolo ABC essendosi tirata la FG parallela alla base BC, sarà la AB alla AF, così la AD alla CD; cioc-dhe bisognava fare.

PROP. XI. PROBLEMA.

Date due linee rette ritrovare in ordine ad essa la terza proporzionale.

I.

Siano date due linee rette AB, ed AD, fa duopo ritrovare in ordine ad esse la terza proporzionale.

II

Si congiungano in maniera le due suddette linee da-

date, che formino l' angolo DAB.
Si congiunga la BD.
La AB si porti innanzi sin al punto C, in modo chè la BC sia eguale alla AD *.
Per lo punto C si tiri la retta CE parallela alla BD, la quale s' incontri colla AD portata tanto innanzi, quanto bisogna nel punto E. Io dico, che la DE sia la terza proporzionale richiesta; vale a dire, che AB sia ad AD, come l' istessa AD alla terza proporzionale DE.

III.

Siccome nel triangolo ACE si è tirata la BD parallela alla base CE, così sarà * AB a BC come la AD alla DE; ma dalla costruzione la BC è eguale alla AD: dunque sarà parimente, come AB ad AD, così l' istessa AD alla DE, ciocchè bisognava fare.

* *Cor. 1. della pr. 2 di questo.*

PROP XII. PROBLEMA.

Date tre linee rette ritrovare in ordine ad esse la quarta proporzionale.

I.

Siano date tre linee rette AB, BC, AD; fa duopo ritrovare in ordine ad esse la quarta proporzionale. FIG. 2.

II.

Le due prime AB, BC si mettano a giacere a dirittura, sicchè formino la sola linea dirita ABC.
L' altra AD si unisca colla AC, in modo che formi l' angolo DAC.
Si congiunga * *la DB.*
Per lo punto C si tiri la CE rarallela alla BC, la quale s' incontri colla AD portata innanzi, quanto bisogna nel punto E. Io dico, che la

DE sia la quarta proporzionale richiesta in ordine alle tre linee rette date *AB*, BC, AD: vale a dire, che come sta AB a BC, così sarà *AD* a DE.

III

* *Cor.* 1. *della pr.* 2. *di questo.* Siccome nel triangolo ACE si è tirata la BD paralleia alla base BE; così sarà * la AB alla BC come la AD alla *DE*. Ciocchè bisogna fare.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Date due linee rette ritrovare la mezza proporzionale.

FIG. 13. I.

Siano date due linee rette AB, BC, fa duopo ritrovare in ordine ad esse la mezza proporzionale.

II.

Si pongano le due linee rette date AB, *BC a dirittura, sicchè costituiscano la sola linea*

* *pr.* 12. I. *retta AC.*

Si seghi la AC per mezzo * *nel punto D.*

* *dim.* 3. *Dal centro D col raggio DA: ovvero DC si descriva* * *il semicerchio AEC.*

* *pr.* 11. I. *S' innalzi dal punto B sopra la AC la perpendicolare BE* *. Io dico, che questa perpendicolare sia la mezza proporzionale richiesta; vale a dire, che come sta la AB alla BE; così sta l' istessa BE alla BC.

III.

* *dim.* 1. *Si congiungano* * *le due rette AE, CE:* perchè l' angolo AEC è nel semicerchio, in conseguenza egli sarà retto *: quindi il triangolo

* *pr.* 31. III. AEC sarà rettangolo; nel quale essendosi tirata la perpendicolare EB dal vertice E sopra la base AC, sarà * come AB a BE, così l'istessa BE alla BC; ciocchè dovea farsi.

* *Cor.* 3. *della pr. di questo.*

PROP.

PROP. XIV. TEOREMA.

Se due parallelogrammi hanno un angolo eguale ad un angolo, e sono eguali fra di loro; avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. Viceversa, se due parallelogrammi hanno un angolo eguale ad un angolo, ed i lati intorno cotesti angoli reciprocamente proporzionali, saranno essi eguali fra di loro.

I.

I due parallelogrammi AC, BF abbiano in primo luogo gli angoli ABC, EBG eguali fra loro; ed inoltre siano essi eguali fra di loro, io dico, che li lati intorno gli angoli eguali saranno reciprocamente proporzionali; vale a dire, come sta AB a BG, così sarà EB a BC. Viceversa, se l'angolo ABC sia eguale all'angolo EBG, e siano inoltre i lati intorno gli accennati angoli eguali reciprocamente proporzionali, i due parallelogrammi saranno eguali fra loro.

II.

Costituiscasi il lato AB del parallelogrammo AC in diritto al lato BG del parallelogrammo BF: non è da ponersi in dubbio, che l'altro lato CB del primo parallelogrammo resti a giacere per diritto coll'altro lato BE del secondo parallelogrammo; perchè in tal modo si verifica, che gli angoli ABC, EBG siano eguali fra loro. *Si distendano i lati DG, FG* finchè vadano ad unirsi nel punto H.* * *dim.* 2.

III.

I. Poichè dalla supposizione il parallelogram-

mo AC è eguale al parallelogrammo BF, il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, avrà l'istessa ragione *, che il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH: ma il parallelogrammo AC sta al parallelogrammo BH, come la base ** AB alla base BG, perchè hanno l'istessa altezza; e per la medesima ragione il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH sta come la base BE alla base BC: dunque sarà * AB a BG, così BE a BC.

* *pr.7.V.*

** *pr.1.di questo.*

* *pr.11.V.*

II. Perchè dalla supposizione AB sta a BG; come BE a BC, ed AB a BG sta, come il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, perchè questi due parallelogrammi * hanno l'istessa altezza, e BE a BC sta, come il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH, sarà * come il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, così il parallelogrammo BF all'istesso parallelogrammo BH; quindi i due parallelogrammi AC, BF avendo l'istessa ragione al terzo parallelogrammo BH saranno * eguali fra loro; ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.1. di questo.*

* *pr.11.V.*

* *pr.9.V.*

PROP. XV. TEOREMA.

Se due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo, sono eguali fra loro, ed avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. Viceversa se due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo, ed hanno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali, saranno eguali fra loro.

I.

FIG. 15. I due triangoli ABC, DBE abbiano in primo luogo l'angolo ABC eguale all'angolo DBE.

e sia-

e siano inoltre eguali fra loro ; io dico , che i lati intorno gli due angoli saranno reciprocamente proporzionali ; vale a dire , che AB sarà a BE , come DB a BC. Viceversa , se l' angolo ABC sia eguale all' angolo DBE , e siano di più i lati intorno gli angoli eguali , reciprocamente proporzionali ; li due accennati triangoli saranno eguali fra di loro.

II.

Costituiscasi il lato BA del triangolo ABC in diritto col lato BE dell' altro triangolo DBE: non è da ponersi in dubbio, che l'altro BC del primo triangolo resti a giacere per diritto all' altro lato BD del secondo triangolo ; perchè in tal modo si verifica, che gli angoli * ABC, DBE siano eguali fra loro : *Si congiunga la retta AD* *.

pr. 15. I.

dim. 1.

III.

I. Perchè dalla supposizione, il triangolo ABC è eguale al triangolo DBE ; il triangolo ABC avrà al terzo triangolo ABD l' istessa ragione** che ha il triangolo DBE al medesimo triangolo ABD: ma perchè li triangoli ABC, ABD hanno l' istessa altezza , il primo al secondo sta * , come la base CB alla base BD : e per l' istessa ragione il triangolo DBE sta al triangolo DBA , come la base BE alla base BA , sarà , come CB a BD * , così BE a BA.

pr. 7. V.

pr. 1. *di questo* .

pr. 11. V

II. Perchè dalla supposizione i due triangoli ABC , DBE hanno i lati intorno gli agoli eguali reciprocamente proporzionali, sarà AB a BE , così BD a BC : ma AB sta a BE, come il triangolo ABD al triangolo DBE, perchè questi due triangoli hanno l' istessa al-

tezza, e per l' istessa ragione DB a BC sta come il medesimo triangulo ABD al triangolo ABC, sarà come il triangolo ABD al trian-
*pr. 11. Vgolo DBE, così * l' istesso triangolo ABD al triangolo ABG: il perchè avendo il triangolo ABD l' istessa ragione a' doe triangoli DBE, ABC, saranno questi eguali fra loro; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XVI. TEOREMA.

Se quattro linee rette sono proporzionali, il rettangolo formato dalle due linee estreme sarà eguale al rettangolo formato dalle due mezze. Viceversa, se quattro linee rette sono tanto lunghe, che il rettangolo formato dalle due estreme sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze, le suddette quattro linee rette saranno proporzionali.

I.

FIG. 16. Siano quattro linee rette proporzionali AB, CD, CE, AF, vale a dire sia AB a CD, come CE ad AF; io dico, che il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE; viceversa, se il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE, le suddette quattro linee rette saranno proporzionali.

II.

Dalle due estreme AB, AF, se ne formi il rettangolo FABG.

Dalle due mezze CD, CE se ne foami similmente il rettangolo ECDH.

III.

III.

I. Perchè si suppone, che le quattro linee rette AB, CD, CE, AF siano proporzionali, i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH avranno intorno agli angoli retti, e per conseguente eguali FAB, ECD i lati reciprocamente proporzionali, essendo dalla supposizione AB a CD, così CE ad AF; il perchè gli suddetti due parallelogrammi rettangoli saranno * eguali fra loro: II. Supponendosi, che il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE, sarà il rettangolo FABG eguale al rettangolo ECDH: quindi questi due rettangoli essendo eguali fra loro, ed avendo l'angolo retto FAB eguale all'angolo retto ECD, dovranno avere i lati reciprocamente proporzionali *: il perchè, come sta AB a CD, così starà CE ad AF: ciocchè dovea dimostrarsi.

* *pr.* 15. *di questo.*

* *pr.* 14. *di questo.*

PROP. XVII. TEOREMA.

Se tre linee rette sono proporzionali il rettangolo formato dalle due linee estreme sarà eguale al quadrato formato sopra la mezza. Viceversa, se tre linee rette sono tanto lunghe, che il rettangolo formato sopra la mezza, le suddette tre linee tutte saranno proporzionali.

I.

Siano tre linee proporzionali * AB, CD, AF, vale a dire, sia AB a CD, come CD ad AF: dico, che il rettangolo formato dalle due estreme

* *FIG.* 17.

AB, AF sia eguale al quadrato formato sopra la mezza CD. Viceversa, se il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al quadrato formato sopra la mezza CD, le suddette tre linee rette saranno proporzionali.

II.

Si prenda un' altra linea, retta CE eguale alla CD. *Dalle due estreme AB, AF se ne formi il rettangolo FABG.*

Dalla mezza CD, *e della sua eguale CE se ne formi il rettangolo ECDH, il quale riuscirà quadrato, perchè la lunghezza è eguale alla larghezza.*

III.

E primieramente supponendosi, che AB sia a CD, come CD ad F, sarà come AB a CD, così CE ad AF; perchè dalla costruzione la CE è eguale alla CD: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH avendo l'angolo retto FAB, eguale all' angolo retto ECD, e di più avendo intorno a questi angoli i lati reciprocamente proporzionali, saranno essi * eguali fra loro: ma il rettangolo ECDH è eguale al quadrato della mezza CD; dunque il rettangolo formato dalle due estreme sarà eguale al quadrato della mezza. Viceversa supponendosi il rettangolo formato dalle due estreme AB, ed AF eguale al quadrato della mezza CD, sarà il rettangolo FABG eguale al quadrato, ovvero al rettangolo ECDB: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH essendo eguali fra loro, ed avendo di più l'angolo retto FAB eguale all' angolo

* *pr.* 14 *di questo.*

ret-

retto ECD, avranno * i lati reciprocamente proporzionali, e per conseguente sarà AB a CD, così CE, ovvero CD ad AP. Ciocchè dovea dimostrarsi. *pr.14. di questo.

PROP. XVIII. PROBLEMA.

Descrivere sopra una linea retta data una figura rettilinea simile, e similmente posta ad un' altra figura rettilinea data.

I.

Sia data la linea diritta AB, e sia data la figura rettilinea CDFE: fa duopo sopra la linea diritta data AB descrivere una figura rettilinea simile, e similmente posta alla data CDFE. FIG. 18.

II.

Si risolva la figura rettilinea data in tanti triangoli, come quì, in due CDF, CFE.

*Si facciano * gli angoli BAH ABH eguali rispettivamente agli angoli DCF, CDF.* *pr.32.1.

*Si facciano gli angoli * HAG, AHG eguali rispettivamente agli angoli FCE, CFE: io dico,* che la figura rettilinea AHG sia simile, e similmente posta alla data CDFE. *p.23. 1.

III.

Imperciocchè: essendo dalla costruzione li due angoli BAH, ABH eguali agli angoli DGE, CLF, ciascuno a ciascuno: sarà il rimanente angolo AHB eguale all'angolo rimanente CFD: imperciocchè in ogni triangolo tutti li tre angoli sono eguali a due retti *, ma dall' istessa costruzione l'angolo AHG è eguale *pr.32.1.

eguale all'angolo CFE ; dunque tutto l'angolo BHG sarà eguale a tutto l'angolo DFE. Inoltre, essendo li due angoli HAG, AHG eguali rispettivamente a' due angoli FCE, CFE, sarà l'angolo rimanente AGH eguale all'angolo rimanente CEF, e tutto l'angolo GAB sarà eguale a tutto l'angolo ECD: quindi i quattro angoli GAB, ABH, BHG, HGA della figura rettilinea descritta saranno eguali rispettivamente a' quattro angoli ECD, GDF, DFE, FEC, della figura rettilinea data. Inoltre; essendo il triangolo ABH equiangolo al triangolo CDF, saranno i lati * intorno gli angoli eguali proporzionali, e per conseguente sarà AB a BH, così CD a DF; e BH ad HA, così DF ad FC: ma a cagione degli altri due triangoli equiangoli AHG, CFE, AH sta ad HG, come CF ad FE: dunque per la egual ragione ordinata sarà * BH ad HG, così DF ad FE; e per causa de' medesimi triangoli equiangoli AHG, CFE, sarà HG a GA, così FE, ad EC, e GA ad AG, così EC a CF; ma la cagione de' due altri triangoli equiangoli AHB, CFD; AH ad AB sta, come CF a CD: dunque per l'egual ragione ordinata, sarà AG ad AB, così CE a CD: quindi i quattro lati AB, BH, HG, GA della figura rettilinea descritta sopra la data AB sono proporzionali a' quattro lati CD, DF FE, EC della figura rettilinea data: il perchè essendosi dimostrato, che gli angoli sono eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno; ne segue, che le suddette due figure rettilinee siano simili, e similmente poste: ciocchè bisognava fare.

*pr. 3. di questo.

*pr. 22. V.

PROP. XIX. TEOREMA.

I triangoli simili sono fra loro in ragione duplicata de' lati omologi. L. Sia-

I.

Siano i due triangoli simili ABC, DEF, e sia il lato BC omologo al lato EF; io dico, che il triangolo ABC al triangolo DEF ha ragion duplicata del lato BC al lato omologo EF. FIG. 19

II.

Ritrovisi * *in ordine alle due linee rette BC, EF la terza* * *proporzionale BG.*
Si unisca la retta AG.

*pr. 11. di questo.

III.

Siccome il triangolo ABC dalla supposizione è simile al triangolo DEF così sarà il lato AB al lato BC, come il lato DE al lato EF, e per la ragion permutata * come il lato AB al lato DE, così il lato BC al lato EF: ma dalla costruzione il lato BC sta al lato EF, come l'istesso lato EF a BG; dunque sarà ancora * AB a DE, così EF a BG: il perchè i due triangoli ABG; DEF, avendo l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, perchè i detti triangoli si suppongono simili, ed avendo i lati reciprocamente proporzionali intorno gli angoli eguali, saranno * essi eguali fra loro: laonde il triangolo ABC avrà al triangolo DEF l'istessa ragione, che il triangolo ABC al triangolo ABG *; ma il triangolo ABC sta al triangolo ABG. come sta la base BC alla base BG *; dunque sarà parimente il triangolo ABC al triangolo DEF * così la base CB alla base BG. Si consideri ora, che essendo le tre linee BC, EF, BG con-

*pr. 16. V.
*pr. 11. V.
*pr. 16 di questo.
*pr. 7. V.
*pr. 1. di questo.
*pr. 11. V.

continuamente proporzionali, la prima BC alla terza FG * ha ragion duplicata della prima BC alla seconda EF; quindi essendosi già dimostrato, che il triangolo ABC al triangolo DEF sia come BC a BG; avrà ancora il triangolo ABC al triangolo DEF ragion duplicata di BC ad EF. Ciocchè dovea dimostrarsi.

* *Veggasi la Spiegazione delle def. 6. 7.*

Corollario.

Dalla dimostrazione di questa proposizione ne segue 1. che se tre linee BC, EF, BG sono continuamente proporzionali, come sta la prima BC alla terza BG così sta il triangolo ABC descritto sopra la prima al triangolo DEF simile, e similmente posto descritto sopra la seconda: II. *Che avendo due triangoli simili ABC, AEF, per ritrovarne la ragione, fa duopo, o cercare la ragion duplicata de' lati omologi BC, EF, vale a dire la ragion composta di due ragioni, ciascuna delle quali sia eguale a quella, che ha BC, ad EF: ovvero ritrovare in ordine a' due lati omologi BC, EC, EF la terza proporzionale BG; che poi, come sta BC, a BG, così starà il triangolo ABC al triangolo DEF.*

PROP. XX. TEOREMA.

I poligoni simili si risolvano I. *in un egual numero di triangoli:* II. *Questi triangoli sono simili fra loro:* III. *Sono i suddetti triangoli proporzionali a tutti i poligoni:* IV. *I poligoni sono in ragion duplicata de' lati omologi.*

I.

FIG. 20. Siano i due poligoni simili N, P, di modo che gli angoli, in A, in B, in C, in D, de

ed E siano rispettivamente eguali agli angoli in *F*, in G, in H, in I, ed in K, ed i lati intorno gli accennati angoli eguali siano proporzionali; io dico in primo luogo, che in quanti triangoli si risolve il poligono N, in altrettanti triangoli si risolve parimente il poligono P. Dico di più, che li triangoli del primo poligono sono simili a' triangoli corrispondenti del secondo poligono: dico inoltre, che i detti triangoli sono fra loro, come sono i poligoni. E finalmente io dico, che il poligono al poligono ha ragione duplicata del lato *AB* al lato omologo FG.

II.

*Da' vertici A, ed F degli angoli eguali BAE, GEK si tirino le linee rette AC, AD, FH, FI.** * *dim.*

III.

I. Supponendosi il poligono N simile al poligono P, sarà il numero degli angoli del primo poligono eguale al numero degli angoli dell' altro poligono: quindi, quante linee rette si tirano nel poligono N, altrettante se ne tireranno nell altro poligono P: dal che poi ne segue, che il numero de' triangoli fatti nel primo poligono sia eguale al numero de' triangoli fatti nell' altro poligono.

II. Essendo dalla supposizione l'angolo ABC eguale all' angolo FGH, e di più il lato AB al lato BC, come il lato FG al lato GH, i due triangoli ABC, FGH, avendo un angolo eguale ad un angolo, ed intorno gli angoli eguali i lati proporzionali, saranno * equiangoli, e simili; e perciò l'angolo BAC sarà * *pr 6. di questo.*

egua.

eguale all' angolo GFH ; e l' angolo BCA sarà eguale all' angolo GHF : ma dalla supposizione l' angolo BAE è eguale all' angolo GFK e l' angolo BCD è eguale all' angolo GHI ; dunque sarà l' angolo CAE eguale all' angolo HEK, e l' angolo ACD eguale all angolo FHI. Inoltre essendo l' angolo AED eguale all' angolo FKI, ed il lato AE ed ED , come FK a KI , i triangoli AED , FKI, perchè hanno un' angolo eguale ad un angolo , ed intorno agli angoli eguali i lati proporzionali, saranno equiangoli *, e simili; e per conseguente sarà l' angolo EAD eguale all' angolo KEI , e l' angolo EDA eguale all' angolo KIF, e l' angolo EDA eguale all' angolo KIF: quindi essendosi dimostrato, che l' angolo CAE sia eguale all' angolo HFK , ed essendo dalla supposizione l' angolo EDC eguale all' angolo KIH, sarà l' angolo CAD eguale all' angolo HFI, e l' angolo ADC eguale all' angolo FIH: di modo chè i due triangoli ACD, FHI essendo equiangoli, saranno * ancora simili; il perchè i tre triangoli ABC , ACD , ADE sono rispettivamente simili a' tre triangoli FGH , FHI, FIK.

* *pr. 6. di questo.*

* *pr. 7. di questo.*

III. Essendosi dimostrati i triangoli ABC, FGH simili fra loro, avrà * il triangolo ABC, al triangolo FGH ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: e per l' istessa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI avrà parimente ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: quindi, come sta il triangolo ABC al triangolo FGH ; così sarà il triangolo ACD al triangolo FHI; poichè la ragione de' due primi triangoli, e la ragione da' due secondi triangoli, è in ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH ; nell' istes-

* *pr. ant.*

sa maniera si dimostrerà, che il triangolo ACD al triangolo FHI sia, come il triangolo ADE al triangolo FIK, perchè la ragione de' due primi, e de' due secondi triangoli, è in ragion duplicata del lato AD al lato omologo FI; quindi i tre triangoli ABC, ACD, ADE saranno rispettivamente proporzionali a' tre triangoli FGH, FHI, FIK, ciascuno a ciascuno, e per conseguente, come sta il triangolo ABC al triangolo FGH, così saranno * tutti tre i triangoli a tutti gli altri tre triangoli: ma tutti tre i primi triangoli formano il poligono N, e tutti tre i secondi triangoli formano l'altro poligono P; dunque sarà il poligono N al poligono P, così il triangolo ABC al triangolo FGH, e per conseguente, come il triangolo ACD al triangolo FHI, così il triangolo ADE al triangolo FIK. * pr. 12. V.

IV. Finalmente essendosi dimostrato, che il poligono N sia al poligono P, come il triangolo ABC al triangolo FGH, siccome il triangolo ABC al triangolo FGH sia ragion duplicata del lato AB al lato omologo FG; così similmente il poligono N avrà al poligono P ragion duplicata del lato AB al lato omologo FG: ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollario.

I. Se tre linee rette AB, FG, ed X, sono continuamente proporzionali, come sta la prima AB alla terza X, così starà il poligono N descritto sopra la prima al poligono P simile, e similmente posto descritto sopra la seconda; imperciocchè, così la ragione di AB ad X, come quella del primo poligono al secondo è in duplicata ragione di AB ad FG: II. Che avendo due poligoni N, P simili, per ritrovarne la ragione, fa duopo, o cercare la ragion duplicata da' lati omologi AB, FG, vale a dire la ragion

gion composta da due ragioni, ciascuna delle quali sia eguale a quella, che ha AB ad FG; ovvero ritrovare in ordine a' due lati omologi AB, ed FG la terza proporzionale X, che poi, come sta AB ad X, così starà il poligono al poligono.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se due figure rettilinee sono simili ad una medesima figura rettilinea, saranno simili fra loro.

I.

FIG. 21. Siano le due figure rettilinee A, e C simili alla terza B; io dico esser esse simili fra loro.

II.

Perchè dalla supposizione la figura A è simile alla figura B, non solamente il numero degli angoli dalla figura A sarà eguale al numero degli angoli della figura B, ma ancora sarà ciascuno angolo della figura A eguale a ciascun'angolo della figura B. Similmente, perchè la figura C dalla supposizione è simile alla figura B, non solamente il numero degli angoli della figura C sarà eguale al numero degli angoli della figura B, ma sarà ciascun angolo della figura C eguale a ciascun' angolo dell' istessa figura B; quindi gli angoli della figura A saranno eguali, così di numero, come di quantità agli angoli della figura C. Inoltre, essendo dalla supposizione la figura A simile alla figura B, saranno i lati intorno gli angoli eguali delle sudette figure proporzionali fra loro, il che supponendosi parimente delle figure C, e B; ne segue, che i lati intorno gli angoli della figura A siano proporzionali a' lati intorno gli an-

angoli eguali dalla figura C. e per conseguente le figure A, e C sono simili; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXII TEOREMA.

Se quattro linee rette sono proporzianali, e sopra la prima, e la seconda s' intendano descritte due figure rettilinee simili, e similmente poste, siccome ancora sopra la terza, e la quarta due altre figure rettilinee simili, e similmente poste, sarà la prima figura alla seconda, come la terza alla quarta. Viceversa, se quattro linee rette sono tali, che descritte sopra la prima e la seconda, due figure rettilinee simili, e similmente poste, e descritte inoltre sopra, e la seconda due figure rett linee simili, e similmente poste, e descritte inoltre sopra la terza, e la quarta due altre figure simili, e similmente poste, siano le suddette figure proporzionali, le quattro linee rette saranno parimente proporzionali.

I.

Siano quattro linee rette AB, CD, EF, GH, *FIG* 22. proporzionali, vale a dire, sia, come AB a CD, così EF a GH: io dico, che descritte sopra la prima, e la seconda le due figure rettilinee ABI, CDK simili, e similmente poste, e descritte di più sopra la terza, e la quarta due altre figure rettilinee Z, X simili, e similmente pose, sarà la figura ABI alla figura CDK, così la figura Z alla X. Viceversa, se essendosi simili, e similmente poste le figure ABI, CDK, essendo parimente simili, e similmente poste le figure Z, X sia, come la figura ABI alla figura CDK, così la figura Z alla figura X, sarà AB a CD, così EF a GH.

II

I. Perchè dalla supposizione la figura rettilinea ABI è simile alla figura rettilinea CDK, avrà * la figura ABI alla figura CDK ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD: ma AB a CD dall' istessa supposizione sta, come EF a GH; dunque la figura ABI alla figura CDK * avrà primente ragion duplicata di EF a GH. Quindi, perchè anche la figura Z alla figura X ha ragion duplicata del lato EF al lato omologo GH, perchè le dette figure Z, X sono supposte simili ne segue che la figura ABI sia alla figura CDK, come sta la figura Z alla figura X.

* *pr.* 2 *di questo*

* *pr.* 21. *V*

II Perchè dalla supposizione la figura ABI è simile alla figura CDK, avrà la figura ABI alla figura CDK, ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD; ma dall' istessa supposizione la figura ABI alla figura CDK sta, come la figura Z alla figura X; dunque anche la figura Z alla figura X avrà ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD: quindi, poichè la figura Z a la figura X ha ancora ragion duplicata di EF a GH, perchè le dette figure sono sottoposte simili, ne segue, che la ragione duplicata di AB a CD sia eguale alla ragion duplicata di EF a GH; e per conseguente: che AB sia a CD, come EF a GH: ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollario.

Da questa proposizione segua, che se quattro linee diritte sono di proporzionali, anche i quadrati formati sopra di esse siano proporzionali; imperciocchè i quadrati descritti sopra la prima, e la seconda sono due figure simili, e similmente poste, siccome

me ancora i quadrati descritti sopra la terza, e la quarta sono pur figure simili, e similmente poste. Si può provare questa verità per mezzo de' numeri. Sia 4 a 4 . così 5 a 10: è manifesto, che 4 quadrato di 2 sta a 16 quadrato di 4, come 25 quadrato di 5 sta a 100 quadrato di 10.

PROP XXIII. TEOREMA.

I parallelogrammi equiangoli hanno fra loro quella ragione, che nasce componendo insieme le ragioni de' lati, che sono intorno gli angoli eguali.

I.

Siano li due pallelogrammi equiangolo AC, BG e sia l'angolo ABC eguale all'angolo FBE; io dico, che il parallelogrammo AC abbia al parallelogrammo BG quella istessa ragione, la quale nasce componendo insieme le ragioni di AB a BE, di CB a CF, vale a dire de' lati, che sono intorno gli angoli eguali. *FIG.* 28.

II.

Si dispongano questi due parallelogrammi in modo chè la retta AB giaccia a dirittura colla retta BE: non è da mettersi in dubbio che la retta CB verrà a giacere ancora per diritto alla retta BF; imperciocchè in tal modo si verifica, che gli angoli ABC, FBE siano eguali fra loro.

Si distendano le rette DC, GE, finchè vadino ad unire nel punto H.

Si prenda ad arbitrio la linea retta M, ed in ordine alle tre linee rette AB, BE, ed M si ri-

ritrovi la quarta proporzionale N.
In ordine alle tre linee rette CB, BF, ed N si ritrovi la quarta proporzionale O.

III.

Perchè li due parallelogrammi AC, BH hanno l'istessa altezza: sarà il primo parallelogrammo al secondo *, come la base AB alla base BE: ma AB a BE dalla costruzione sta come M ad N; dunque sarà parimente il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, così M ad N. Similmente, perchè li parallelogrammi BH, BG hanno l'istessa altezza, sarà il parallelogrammo al secondo, come la base BC alla base BF: ma dalla costruzione la base BC alla base BF, sta come N ad O, dunque sarà parimente il parallelogrammo BH al parallelogrammo BG, così N ad O. Quindi i tre parallelogrammi AC, BH, BG paragonati colle tre linee rette M, N, ad O costituiscono una ragion ordinata; essendo come il primo parallelogrammo al secondo, così la prima linea alla seconda, e come il secondo parallelogrammo al terzo, così la seconda linea alla terza: laonde sarà il parallelogrammo AC al parallelogrammo BG, così la prima M alla terza O. Ma la prima M alla terza O* ha ragion composta da M ad N, e da N ad O: dunque anche il parallelogrammo AC al parallelogrammo BG avrà ragion composta dalle ragioni di M ad N, e di N ad O: di modo che essendo, come M ad N, così AB a BE, e come N ad O, così CB a BF; ne segue, che il parallelogrammo AC al parallelogrammo BG abbia parimente ragion composta dalle ragioni di AB a BE, e di GB a BF; ciocchè dovea dimostrarsi.

*pr. 1. di questo

*Veggasi la spiegazione delle def. 3. e 6. di questo.

PROP.

PROP. XXIV. TEOREMA.

I parallelogrammi, che stanno intorno la diagonale di un parallelogrammo sono simili a tutto il parallelogrammo, e sono simili fra loro.

I.

Sia il parallelogrammo ABCD compartito dalla diagonale AC, e dalle due parallele EF, GH, le quali s' incrociano nel punto I della suddetta diagonale in quattro parallelogrammi; io dico, che li due parallelogrammi AEIF; IHGF che stanno intorno al diametro AC sono simili così a tutto il parallelogrammo ABCD, come fra loro. FIG. 24.

II.

Imperciocchè I. i due parallelogrammi AEIC ABCD hanno l' angolo in A comune: II. A causa delle parallele EF, BC segate dalla terza AB, l' angolo esteriore AEI è eguale * all'* pr. 29. I, angolo interiore opposto ABC: III. L' angolo EIG è eguale all' angolo BCD, perchè entrambi sono eguali * all' istesso angolo oppo * pr. 34. I. sto EAG: e finalmente l'angolo esteriore AGI è eguale all' angolo interiore opposto ADC, a causa delle parallele GH, DC segate dalla terza AD: quindi li due parallelogrammi AEIG, ABCD saranno equiangoli. Rimane ora a dimostrare, che abbiano i lati intorno agli angoli eguali proporzionali: ciocchè noi faremo così. Il triangolo AEI è equiangolo al triangolo ABC; poichè l'angolo in A è comune, e l' angolo AEI si è dimostrato eguale all' angolo ABC.. dunque i lati intorno gli

pr. 4. di questo angoli eguali saranno proporzionali * e per conseguente, come sta EA ad AI, così starà BA ad AC: Similmente li due triangoli AGI, ADC sono equiangoli, perchè l'angolo in A è comune ad entrambi, e l'angolo AGI è eguale all'angolo ADC; dunque i lati intorno gli angoli eguali saranno proporzionali, e per conseguente sarà IA ad AG, come CA ad AD: ma è stato dimostrato, che EA ad AI è come BA ad AC; dunque per l'egual ragione ordinata, sarà EA ad AG, così BA ad AD: Inoltre per ragion degl'istessi triangoli AGI ADC equiangoli, sarà AG, a GI, come AD a DC, e come GI ad IA, così DC a CA, ma per causa de' triangoli equiangoli AIE, ACB, IA ad IE è come CA a CB: dunque di nuovo per l'egual ragion ordinata sarà GI ad IE, così CD a CB; e finalmente, come IE ad EA, così CB a BA. di modo chè i parallelogrammi AEIG, ABCD, oltre l'avere gli angoli eguali, ciascuno a ciascuno, hanno di più i lati proporzionali intorno gli angoli eguali; e per conseguente sono simili: nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'altro parallelogrammo IHCF sia simile all'istesso parallelogrammo ABC; Di modo chè li due parallelogrammi AEIG, IHCF ritrovandosi simili al terzo parallelogrammo *pr. 21. di questo* ABCD, saranno simili fra loro *: Ciocchè dovea dimostrarsi.

Avvertimento.

Nel Corollario della proposizione IV. *del libro* II. *si disse, che i parallelogrammi, i quali sono posti intorno la diagonale del quadrato sono quadrati:* Euclide *qui dimostra, che i parallelogrammi situati intorno la diagonale di un parallelogrammo sono simili all'istesso parallelogrammo: imperciocchè da*

que-

questa proposizione è facile a dedurre, che se il parallelogrammo principale è quadrato, anche i due parallelogrammi descritti intorno la di lui diagonale abbiano da essere quadrati: giacchè un quadrato non può esser simile ad altre figure, se non che alle quadrate.

PROP. XXV. PROBLEMA.

Date due figure rettilinee, fa duopo descriverne una terza, la quale sia simile, e similmente posta ad una delle due suddette figure date, e sia eguale all'altra.

I.

Siano date due figure rettilinee C, e D: fa- *FIG. 25.*
duopo descriverne una terza, la quale sia simile, e similmente posta alla figura C, e sia eguale all'altra D.

II.

Sopra il lato AB della figura C si descriva il parallelogrammo L eguale all'istesso rettilineo C, adoprando qualsivoglia angolo BAE.* *pt. 45. I.*

Sopra il lato BF si adatti il parallelogrammo I eguale all'altro rettilineo D, che abbia l'angolo GBF eguale all'angolo BAE, in tal modo le due linee rette AB, BG giaceranno a dirittura, e li due parallelogrammi L, I avranno l'istessa altezza.

Fra le rette AB, BG si ritrovi la mezza proporzionale X.* **pr. 23. di questo.*

Si descriva sopra questa linea retta X una figura rettilinea simile, e similmente posta* *pr. 18. di questo.* *alla figura C: io dico, che essa riuscirà eguale all'altra figura data D.*

III.

Imperciocchè, essendo dalla costruzione AB ad X, così X a BG, sarà la figura rettilinea C descritta sopra la prima AB alla figura rettilinea simile, e similmente posta: descritta sopra la seconda X, così la prima AB alla terza BG: ma AB sta a BG, come il parallelogrammo L al parallelogrammo I, perchè questi due parallelogrammi hanno l'istessa altezza: dunque sarà ancora la figura rettilinea C alla figura rettilinea descritta sopra la linea retta X, così il parallelogrammo L al parallelogrammo I; quindi, essendo la figura rettilinea C eguale dalla costruzione al parallelogrammo L, sarà * la figura rettilinea descritta sopra la linea retta X eguale al parallelogrammo I: ma questo parallelogrammo dalla costruzione è eguale al rettilineo D; dunque sarà la figura rettilinea descritta sopra la linea retta X eguale alla data D: sicchè, essendo dalla costruzione simile all'altra figura rettilinea C, si è soddisfatto il Problema in quistione.

Cor. 1. *della pr.* 20. *di questo.*

**pr.* 14 *V.*

PROP. XXVI. TEOREMA.

Se da un parallelogrammo sia tolto un altro parallelogrammo, il quale sia simile, e similmente posto all'istesso parallelogrammo, ed abbiano di più cotesti due parallelogrammi un angolo comune, essi staranno a giacere intorno la medesima diagonale.

I.

FIG. 26. Dal parallelogrammo BD sia tolto il parallelogrammo EG, simile, e similmente posto all'istes-

istesso parallelogrammo BD e sia l'angolo in A comune all'uno, ed all'altro parallelogrammo; io dico, che essi staranno a giacere intorno la medesima diagonale AC; vale a dire, che la diagonale AC dee passare per lo punto F.

II.

Se mai è possibile, sia la diagonale del parallelogrammo BD la retta AIC, la quale non passa per l'angolo F del parallelogrammo EG.
Si distenda la GF, finchè seghi la suddetta diagonale nel punto I.
Si tiri per lo punto I la retta IH parallela alla retta AG.

III.

Perchè li due parallelogrammi BD, HG stanno a giacere intorno l'istessa diagonale AIC, saranno essi simili fra loro *; quindi, come sta AD ad AB, così starà AG ad AH: ma supponendosi il parallelogrammo BD simile, e similmente posto al parallelogrammo EG, come sta AD ad AB, così sta AG ad AE: dunque * come sta AG ad AE, così starà l'istessa AG all'AE; quindi la retta AH maggiore sarà * eguale alla retta AE minore; ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in quistione.

* *pr. 24 di questo.*
* *pr. 11 V.*
* *pr. 9. V.*

Preparazione alle quattro Proposizioni seguenti.

Sia la linea retta AB, sopra la quale si formi ad arbitrio il parallelogrammo ABCD, o siamo similmente sopra l'istessa linea AB formati due altri parallelogrammi AEFD, AGHD, che abbiano l'istessa altezza col primo ABCD, ma che uno sia mi-

no-

nore, l'altro maggiore del medesimo parallelogrammo ABCD, noi diremo per innanzi, che tutti tre cotesti parallelogrammi siano adattati sopra la linea retta AB con questo divario però che il secondo si dirà mancante, ed il terzo eccedente in riguardo al primo ABCD il quale nè manca, nè eccede, ma si ritrova adattato giustamente sopra l'istessa linea retta AB: diremo di più, che il difetto, o mancanza del secondo sia il parallelogrammo EBCF: e l'eccesso del terzo sia il parallelogrammo BGHC.

PROP. XXVII. TEOREMA.

Fra tutti parallelogrammi adattati sopra una linea retta data, che mancano di altrettanti parallelogrammi tutti simili, così fra loro, come ad un parallelogrammo adattato ad arbitrio sopra la metà, il più grande è quello, che si adatta sopra la metà, e che è simile, ed eguale al suo difetto.

I.

FIG. 27. Sia la linea retta AB segata per mezzo nel punto C, e sopra la retta CB sia descritto ad arbitrio il parallelogrammo CBED: io dico, che fra tutti parallelogrammi, che si possono adattare sopra la retta AB; e che mancano di altrettanti parallelogrammi tutti simili al parallelogrammo CBED descritto sopra la di lui metà CB: il più grande è il parallelogrammo ACDF, il quale è descritto sopra l'altra metà AC, ed è eguale, e simile al suo difetto CBED.

II.

Si congiunga la diagonale BD; nella quale si prendano ad arbitrio due punti G, K, il pri-

primo nell' istessa diagonale BD, l' altro nel suo prolungamento DK.

*Per li punti G, e K si tirino le linee LGQ: KNT parallele * a le due BE, AF.* * *pr.* 31

Per li medesimi punti G, e K si tirino di più le parallele OGR, IKH alle due AB, FE.

Finalmente, si costituisca la figura tale, quale si vede quì delineata. Ora non è da mettersi in dubbio, che il parallelogrammo AQGO è adattato sopra la retta AB, e manca del parallelogrammo QBRG, il quale è simile al paral elogrammo CBED descritto sopra la metà GB: imperciocchè i parallelogrammi che stanno * in torno la diagonale d'un parallelogrammo sono simili all'istesso parallelogrammo; siccome ancora non è da dubitare, che il parallelogrammo ATKI sia adattato sopra la linea retta AB, e manchi del parallelogrammo TBHK, il quale è parimente simile al parallelogrammo CBED descritto sopra la metà CB: io dico dunque che il parallelogrammo ACDF adattato sopra la metà AC è maggiore, così de' parallelogrammi AQGO, ATKI, come d'ogni altro parallelogrammo nel quale concorrono le suddette condizioni. * *pr.* 24. *di questo*

III.

Dimostreremo primieramente, che il parallelogrammo ACDF sia maggiore del parallelogrammo AQGO. Il parallelogrammo PCQG è eguale * al parallelogrammo GREL: aggiugnendo dunque ad essi comunemente il parallelogrammo QBRG, sarà il parallelogram- * *pr.* 43. *I.*

mo

mo CBRP eguale al parallelogrammo QBEL; ma il parallelogrammo ACPO è eguale * al parallelogrammo GLRP: dunque sarà ancora il parallelogrammo ACPO eguale al parallelogrammo QBEK; ed aggiugnendo di nuovo comunemente il parallelogrammo CQGP, sarà il parallelogrammo AQCO eguale al gnomone SGK: quindi, essendo il parallelogrammo CBED, ovvero il suo eguale ACDF maggiore del gnomone SGK, sarà l'istesso parallelogrammo ACDF maggiore del parallelogrammo AQCO.

*pr.36.I.

Dimostreremo inoltre, che l'istesso parallelogrammo ACDF sia maggiore del parallelogrammo ATKI. Il parallelogrammo TCDN è eguale al parallelogrammo * DEHM: ma il parallelogrammo DEHM è eguale al parallelogrammo * FDMI: dunque il parallelogrammo TCDN sarà ancora eguale al parallelogrammo FDMI: quindi l'istesso parallelogrammo TCON sarà maggiore del parallelogrammo FNKI; il perchè aggiugnendo comunemente il parallelogrammo ATNF, sarà il parallelogrammo ACDF maggiore del parallelogrammo ATKI; ciocchè dovea dimostrarsi.

*pr.43 I.

*pr.36.I.

PROP. XXVIII. PROBLEMA.

Sopra una linea retta data adattare un parallelogrammo eguale ad una figura rettilinea data, e che manchi d'un parallelogrammo simile ad un altro parallelogrammo dato.

I.

FIG 28. Sia data la linea retta AB, e sia data inoltre così la figura rettilinea C, come il parallelogrammo D; fa duopo adattare sopra la li-

linea retta data AB un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data C; e che manchi d' un parallelogrammo simile al dato parallelogrammo D.

II.

Seghisi la AB per mezzo nel punto E.
Sopra la metà EB si descriva il parallelogrammo EBCF simile al parallelogrammo dato D questo.* * pr. 18. di
Si ritrovi l'eccesso del parallelogrammo EBGF sopra il rettilineo C, il quale eccesso si determina per mezzo dalla proposizione XLV. del primo, siccome ora si dimostrerà.
Si formi il parallelogrammo NMTK eguale al suddetto eccesso e simile al parallelogrammo dato D, ovvero al parallelogrammo EBGF descritto sopra la metà EB. * pr. 15. di questo.
Si seghino da' lati FG, FE le porzioni FQ, FO eguali rispettivamente a' lati omologi RI, KN
Per li punti Q, ed O si facciano passare le rette QPZ, SOR parallele a' lati del parallelogrammo EBGF: io dico, che il parallelogramo AZPS sia quello, che si dimanda.

III.

Siccome dalla costruzione le due linee FQ FO sono eguali alle due KT, KN, e di più comprendono l' angolo QFO eguale all'angolo TKN, imperciocchè dall' istessa costruzine il parallelogrammo NMIK è simile al parallelogrammo EBGF, così sarà il parallelogrammo PO F eguale, e simille al parallelogrammo NMIK: quindi essendo il parallelogrammo NMTK dalla costruzione simile al parallelo-

gram-

non accaderà tirar più avanti la costruzione; poichè il supplemento AEFH del detto parallelogrammo soddisferà al Problema, come quello, che è eguale ancora alla figura rettilinea C, e manca d' un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D.

PROP. XXIX PROBLEMA.

Adattare sopra una linea retta data un parallelogrammo eguale ad una figura rettilinea data, e che ecceda d'un parallelogrammo simile ad un altro parallelogrammo dato.

I.

Sia data la linea retta AB: fa fuopo sopra di essa adattare un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data C, e che ecceda d' un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D. FIG 29.

II.

Seghisi la retta data AB per mezzo nel punto E.

Si descriva sopra la metà EB il parallelogrammo EBGF simile al parallelogrammo dato D.

Ritrovisi un parallelogrammo, il quale sia eguale al parallelogrammo FBCF, ed al rettilineo C uniti insieme, ciocchè si può fare mediante la proposizione XLV del libro primo, siccome ora si dimostrerà. pr. 18. di questo.

Si descriva il parallelogrammo HSKI eguale al suddetto parallogrammo, ovvero eguale al parallelogrammo EBGF, ed alla figura rettilinea C uniti insieme, e simile al parallelogram-

mo dato, e per conseguente simile al paral-
* *pr. 21. di questo.* *lelogrammo EBFG* *

Sopra i lati FG, FE distesi, quanto bisogna si prendano le parti FM, FL eguali rispettivamente a' lati omologi IK, IH.

Per li punti M, ed L, si facciano passare le parallele MPN, RLN a' lati BG, BE, del parallelogrammo EBGF, e di più s' intende compiuta la figura, tale quale si vede descritta; io dico, che il parallelogrammo ARPN sia quello che si dimanda.

III.

Siccome dalla costruzione le due linee rette FM, FL sono rispettivamente eguali alle due IK, IH e di più l'angolo LFM è eguale all'angolo HIK, così sarà il parallelogrammo LFMN eguale, e simile, al parallelogrammo IHSK, ovvero al parallelogrammo FEBG, al quale è simile il suddetto parallelogrammo IHSK essendo entrambi simili al medesimo parallelogrammo D. Quindi i due parallelogrammi FLNM, FEBG avendo l'angolo in F comune, ed essendo di più simili fra loro, saranno situati intorno l'istessa diagonale FBN, laonde il parallelogrammo ARNP adattato sopra la linea retta data AB eccederà d' un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D: imperciocchè l'eccesso è il parallelogrammo BONP, il quale è simile * al parallelo-
* *pr. 24. di questo.* grammo EBGF; e per conseguente è simile al parallelogrammo D. Rimane a dimostrare, che il suddetto parallelogrammo sia eguale alla figura rettilinea data C, ciocchè si farà nella maniera seguente. Dalla costruzione il parallelogrammo IHSK, ovvero FLNM è eguale al parallelogrammo FEBG, ed alla figura rettilinea

C uni-

C uniti insieme: togliendo dunque da essi comunemente il parallelogrammo FEBG, rimarrà il gnomone GBELNM eguale alla figura rettilinea C; ma il suddetto gnomone è eguale al parallelogrammo ARNP, siccome è facile a dimostrare: dunque il parallelogrammo ARNP è eguale alla figura rettilinea C; cioc. chè doveva dimostrarsi.

Avvertimento comune alle due antecedenti Proposizioni.

Si è assunto nella proposizione XXVIII. che possa descriversi un parallelogrammo eguale alla differenza di due figure rettilinee date, e nell' antecedente si è assunto, che possa descriversi un parallelogrammo eguale alla somma di due figure rettilinee date; e si è detto, che l' uno, e l' altro possa ottenersi mediante la prosizione XLV. *del libro primo. Il metodo è questo: Siano date le due figure rettilinee A, e B, fa duopo primieramente ritrovare un parallelogrammo eguale alla differenza delle due suddette figure: Si descriva il parallelogrammo CDGH eguale alla figura rettilinea A *, avvalendosi di qualsivoglia angolo CDG: Poi sopra la linea retta CD adoperando l' istesso angolo CDG si descriva il parallelogrammo CDEF eguale all' altra figura rettilinea B: Ciò fatto, sarà il parallelogrammo HGEF eguale alla differenza delle due figure rettilinee date. Se poi si volesse un parallelogrammo eguale a tutte due le figure rett linee si dovrebbe far così: bisognerebbe primieramente descrivere per la suddetta proposizione* XLV. *il parallelogrammo CDGH eguale alla figura rettilinea A adoperanda qualsivoglia angolo CDG; dopo sopra la retta HG bisognerebbe di più descrivere il parallelogrammo HGEF eguale all' altra figura rettilinea B ado-*

FIG. Q.

pr. 45. I

perando l' angolo HGE eguale all' angolo CBG: che così si verrebbe ad ottenere il parallelogram. mo CDEF eguale ad entrambe le figure rettilinee A, e B.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Segare una linea retta data secondo l' estrema, e mezza ragione.

I.

FIG. 30. Sia data la linea retta AB: fa duopo segarla secondo l' estrema, e mezza ragione, vale a dire, talmente che tutta la linea sia alla parte maggiore di essa, come l' istessa parte maggiore sta alla parte minore.

II.

Sopra la linea retta data AB descrivasi il quadrato BC.

* pr. ant. *Sopra la retta AD si adatti il parallelogrammo rettangolo * DH eguale al quadrato AC, e che ecceda di un altro parallelogrammo rettangolo, il quale è FG; che sia simile al medesimo quadrato AC; quindi purchè ad un quadrato non gli può esser simile altra figura, se non la quadrata, ne segue, che il parallelogrammo rettangolo FG sia un quadrato:* ora io dico; che il punto G divide la linea retta data AB secondo l' estrema, e mezza ragione; vale a dire, che AB sia ad AG, come AG a GB.

III.

Siccome dalla costruzione il rettangolo DG è eguale al quadrato DB, così togliendone comunemente il rettangolo DG, rimarrà il quadrato FG eguale al rettangolo IB: quindi i due parallelogrammi rettangoli IB, FG; avendo un'angolo eguale ad un angolo, e di più essendo eguali, avranno intorno gli angoli eguali i lati reci-

pro-

procamente proporzionali *, e per conseguente sarà IG a GH, come GA a GB: ma IG è eguale a DA, e per conseguente ad AB, e GH è eguale a GA; dunque sarà ancora BA ad AG, come AG a GB; ciocchè doveva farsi. * pr. 4. di questo.

Avvertimento

Questa Problema non è diverso dalla proposizione XI. *del libro* II., *imperciocchè, segata, che sia la retta AB talmente nel punto G, che il rettangolo formato da AB, e BG sia eguale al quadrato di AG, sarà AB ad AG* , come AG a GB; viceversa segata la retta AB, secondo l' estrema, e mezza ragione nel punto G, sarà il rettangolo formato da AB, e BG eguale al quadrato di AG*.* * pr. 17 di questo. * pr. 17. di questo.

PROP. XXXI. TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli la figura rettilinea descritta ad arbitrio sopra l' ipotenusa è eguale alle due figure rettilinee descritte sopra i lati, che contengano l' angolo retto, simili, e similmente poste a quella, che è stata descritta sopra l' ipotenusa.

I.

Sia il triangolo rettangolo ABC, sopra l'ipotenusa BC, del quale sia descritta ad arbitrio la figura rettilinea FB, e sopra i due lati AB, AC siano descritte le figure BG, CI simili, e similmente poste alla suddetta figura BF: io dico, che questa figura sola è eguale a tutte due le figure BG, CI insieme. FIG. 31.

II.

Dal punto A s' intenda abassata la perpendicolare AD.* * pr. 11. I.

III.

Poichè nel triangolo rettangolo ABG dall'an-

golo retto A si è tirata la perpendicolare AD sopra la base BC, sarà così *BA* * mezzo proporzionale fra *CB*, e *BD*, come *CA* mezza proporzionale fra *CB*, e *CD*. Quindi, essendo *CB* a *BA*, come *BA*, a *BD*, sarà la prima *CB* alla terza *BD* *, come la figura rettilinea *BF* descritta sopra la prima alla figura rettilinea *BG* simile, esimilmente posta descritta sopra la seconda: e per la ragion permutata sarà *DB*, a *BC*, come la figura *BG* alla figura *BF*: si dimostrerà parimente che *DC* sia all' istessa *BC*, come la figura rettilinea *CI* all' istessa figura rettilinea *BF*: quindi, essendo la prima *BD* alla seconda *BC*, come la figura rettilinea *BG* terza alla figura rettilinea *BF* quarta; ed essendo di più la quinta *DC* all' istessa seconda *BC*, come la figura rettilinea *CI* sesta alla medesima figura rettilinea *BF* quarta, sarà la composta *BC* dalla prima, e dalla quinta * alla seconda *BC*; come la somma delle due figure rettilinee *BC*, *CI*, che sono la terza; e la sesta alla sola figura rettilinea *BF*: dacchè poi segue, che la sola figura rettilinea *BF* sia eguale ad entrambe le figure rettilinee *BG* *CI*: ciocchè doveva dimostrarsi.

* *Cor. del la pr.* 8. *di questo*

* *Cor. del la pr.* 20. *di questo*

* *pr.* 2. *V.*

PROP. XXXII. TEOREMA.

Se due triangoli avendo due lati proporzionali a due lati siano congiunti in un angolo, in modo che i lati omologi riescano paralleli, ciascuno a ciascuno gli altri due lati de' suddetti triangoli giaceranno a dirittura.

I.

FIG. 32. Abbiamo i due triangoli *ABC*, *DCF*; i due lati *AB*, *AC* proporzionali a' due lati *DC*, e *DE*, vale a dire, come sta *AB* ad *AC*, così

sia

sia DC a DE; ed oltre a ciò i detti triangoli siano tali, che congiugnendosi nell'angolo C, resti il lato AB parallelo al lato DE, ed AC parallelo a DE: io dico, che gli altri due lati BC, CE giaceranno a dirittura.

II.

Siccome dalla supposizione la retta AB è parallela alla retta DC, così sarà l'angolo ABC eguale* all'angolo ACD: similmente siccome dalla supposizione la retta AC è parallela alla retta DE, così sarà l'angolo ACD eguale all'angolo CDE; quindi i due angoli BAC, CDE saranno eguali fra di loro. Il perchè i due triangoli ABC, DCE, avendo l'angolo A eguale all'angolo D, ed avendo di più intorno a cotesti angoli i lati proporzionali, saranno * equiangoli, e per conseguente sarà l'angolo DCE eguale all'angolo ABC: ma si è dimostrato l'angolo ACD eguale all angolo BAC; dunque tutto l'angolo ACE sarà eguale a due angoli BAC, ABC congiunti insieme: aggiugnendo comunemente l'angolo ACB; saranno i due angoli ACE, ACB eguali a'tre angoli BAC, ABC, BCA del triangolo ABC: ma questi tre angoli sono eguali a'due retti*, dunque ancora i due angoli ACE, ACB sono eguali a due angoli retti, dacchè poi segue, che le due rette BC, CE giacciono * a dirittura.

pr. 29. di questo.

pr. 3. di questo.

pr. 32. I.

pr. 14 I.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali, gli angoli così ne' centri, come nelle circonferenze seguono la ragione degli archi, a' quali insistino. Di più i settori seguono la ragione de loro archi.

I.

Ne' cerchi eguali ABC EFG vi siano ne' centri D, ed H due angoli BDC, FHG, e siano due al-

altri angoli alle circonferenze BAC. FEG: io dico primamente, che l'angolo BDC sta all'angolo FHG, come l'arco BC all'arco FG: dico di più che l'angolo BAC sta all'angolo FEG, come l'istesso arco AC all'arco FG. finalmente io dico, che il settore BDC sta al settore FHG, come il medesimo arco BC all'arco FG.

II.

Si congiungano le linee rette BC, FG.

*pr.1.IV. *Si adatti la retta CI eguale * alla linea retta BC; siccome ancora si adattino le rette GL, LP eguali ad FG.*

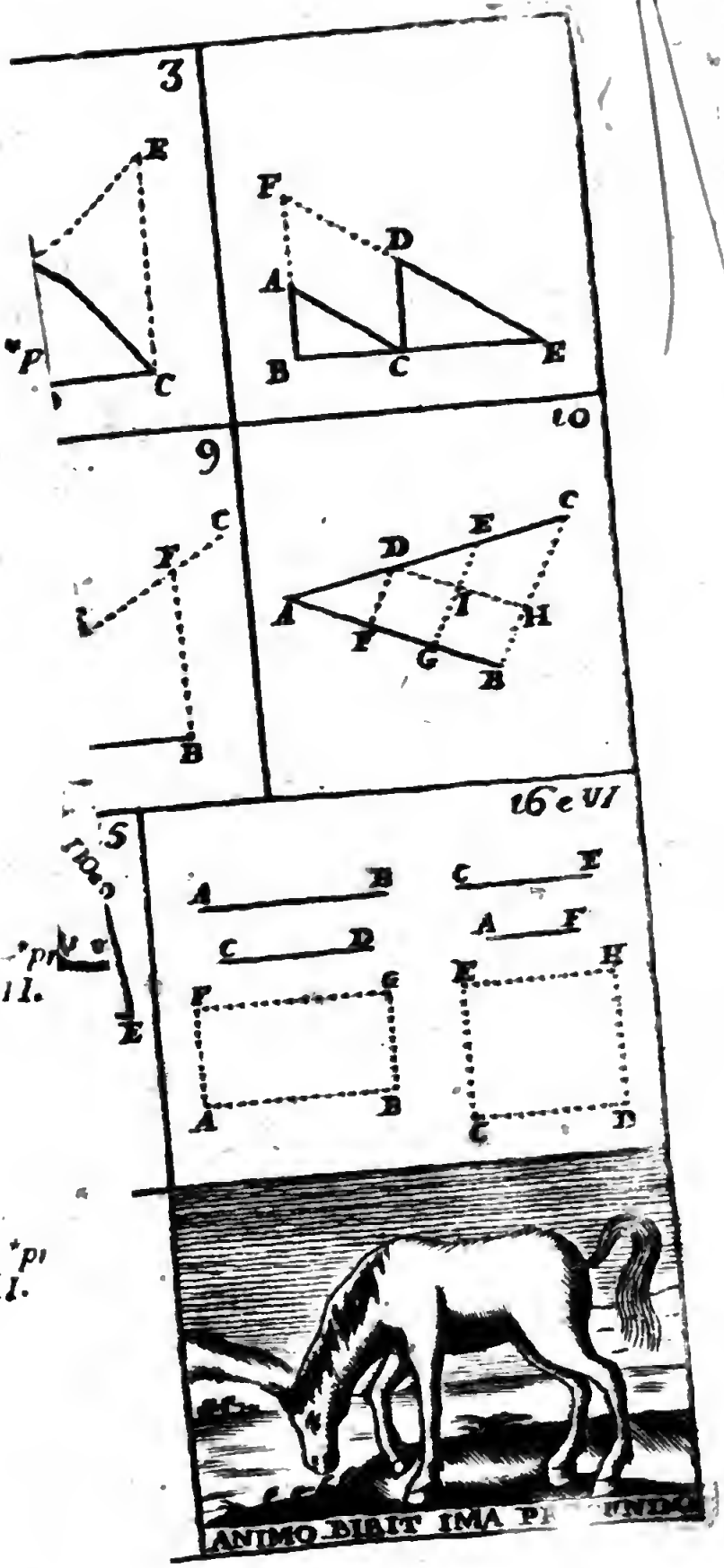
Si congiungano le linee rette DI, HL, HP. Prese ad arbitrio negli archi BC, CI i punti M, ed N, si uniscano le linee rette MB, MC, NC, NI.

III.

I Perchè i due raggi BD, ID sono eguali fra loro, ed il raggio DC è comune, saranno i due lati BD, DC del triangolo BDC eguali a' due lati ID, DC del triangolo IDC, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo di più la base BC eguale alla base CI, sarà l'angolo BDC eguale all'angolo IDC, laonde l'angolo BDI sarà doppio dell'angolo BDC: di più, essendo dalla costruzione la corda *pr. 28. BC eguale alla corda CI, sarà l'arco BC eguale* III. all'arco CI: il perchè l'arco BCI sarà doppio dell'arco BC; e per conseguente l'angolo BDI, e l'arco BI sono egualmente moltiplici dell'angolo BDC, e dell'arco BC. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo FHP, e l'arco FLP siano egualmente moltiplici dell'angolo FHG, e dell'arco FG. Ora, se l'angolo BDI è eguale all'

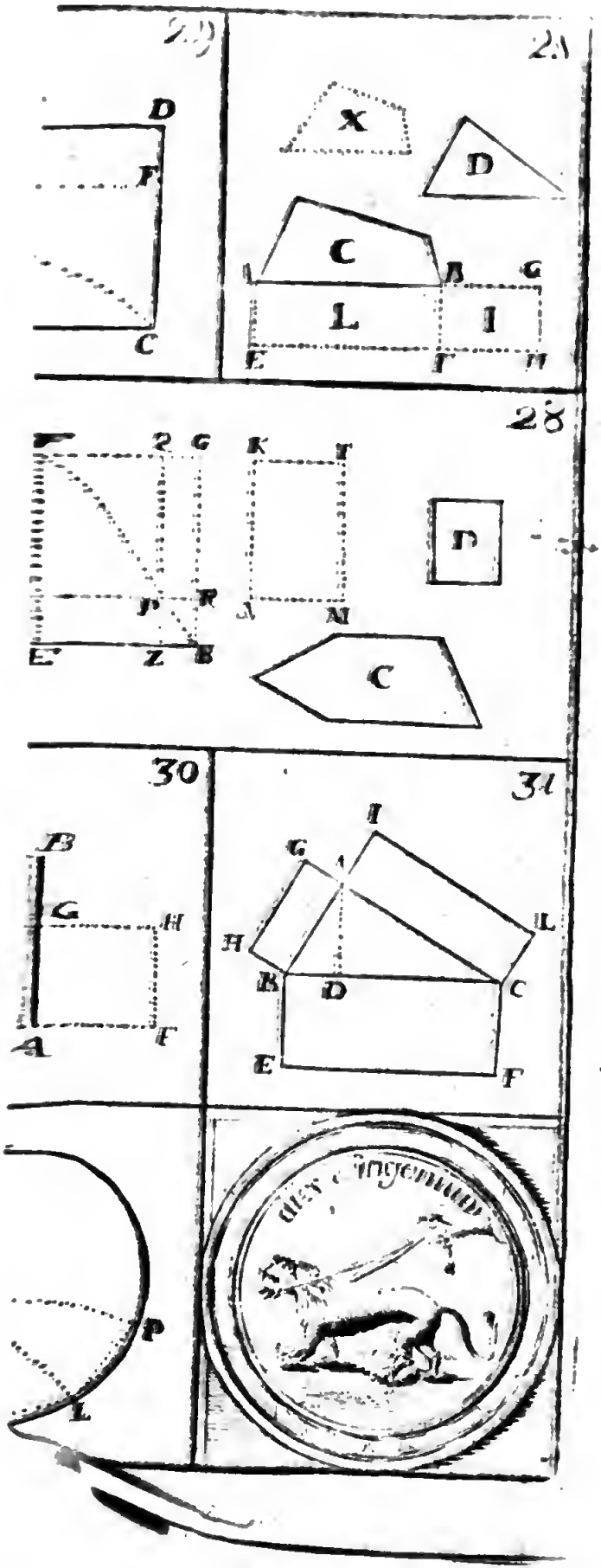
*pr. 27. angolo FHP: sarà l'arco BCI eguale all'arco * III. FLP, e se l'angolo BDI è maggiore, o minore dell'angolo FHP, sarà ancora l'arco BCI; maggiore, o minore dell'arco FLP; quindi, avendo

due


3
E
P
C
F
D
A
B
C
E
9
C
F
B
10
D
E
C
A
I
H
F
G
B
16 e VI
5
A
B
C
D
E
F
G
A
B
C
E
A
F
E
H
C
D
ANIMO DIBIT IMA P

III.

III.


29
D
F
C
28
X
D
C
L
I
E
F
H
27
G
K
I
P
R
M
Z
B
D
C
30
B
G
H
A
F
31
I
G
H
L
B
D
C
E
F
P
L

due ragioni, la prima delle quali è fra l'angolo BDC, e l'angolo FHG, e l'altra è fra l'arco BC, e l'arco FG; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, i quali sono l'angolo BDI, e l'arco BCI sono entrambi, o eguali, o maggiori, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti, che sono l'angolo FHP, e l'arco FLP; ne segue, che le suddette due ragioni siano eguali fra loro *, e per conseguente, l'angolo BDC sia all'angolo FHG, come l'arco BC all'arco FG. * *def.6.V.*

II. L'angolo BDC è doppio dell'angolo BAC; e l'angolo FHG è doppio dell'angolo FEG *: quindi, come sta l'angolo BDC all'angolo FHG così starà l'angolo BAC all'angolo FEG *: mn* si è dimostrato che l'angolo BDC sia all'angolo FHG; come l'arco BC all'arco FG: dunque sarà ancora * l'angolo BAC all'angolo FEG, come l'arco BC all'arco FG. * *p.20.III.* * *p.15. V.* * *p.11. V.*

III. Essendo l'arco BC dalla costruzione eguale all'arco CI, sarà la circonferenza rimanente BAC eguale alla circonferenza rimanente CBAI, e per conseguente l'angolo BMC, che insiste alla prima circonferenza sarà eguale all'angolo GNI, il quale insiste alla seconda circonferenza; quindi, le due porzioni di cerchio BMC, CNI saranno simili fra loro; ma le basi BC, CI delle suddette porzioni sono eguali: dunque esse porzioni saranno ancora eguali *; sicchè essendo ancora ** eguali i triangoli DBC, DCI per la proposizione IV. del libro I. saranno eguali i settori DBMC, DCNI; e per conseguente il settore DBCI sarà doppio del settore DBMC, il perche il settore DBCI, e l'arco BCI, saranno egualmente moltiplici del settore DBMC, e dell'arco BC. Similmente si dimostrerà, che il settore HFGLP, e l'arco FGLP siano egual. * *p.27.III.* * *p.24 III.*

men

mente moltiplicì del settore HFG, dell'arco BCI è maggiore, minore, ovvero eguale all'arco FGLP, ancora il settore DBCI sarà maggiore, minore, ovvero eguale al settore HFGLP: quindi avendo due ragioni, la prima delle quali è fra l'arco BC, e l'arco FG, l'altra è fra il settore DBC, ed il settore HFG: ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici dagli antecedenti, i quali sono dell'arco BCI, ed il settoae DBCI sono entrambi, maggiori, minori, ovvero eguali agli egualmente moltiplici de' conseguenti, che sono l'arco FGLP, ed il settore HFGLP; ne segue, che le suddette due ragioni siano eguali, e che per conseguente l'arco BC sia all'arco FG, come il settore DBC al settore HFG: ciocchè dovea dimostrarsi.

Corollario.

I. Ne segue, che il settore DBC sia al settore HFG, come l'angolo BDC all'angolo FHG, ovvero, come l'angolo BAC all'angolo FEG: imperciocchè l'angolo BDC sta all angolo FHG; come l'arco BC all'arco FG, e nell'istessa ragione è l'angolo BAC all'angolo FEG. II. Che l'angolo al centro BDC sia a quattro angoli retti, come l'arco BC a tutta la circonferenza del cerchio; imperciocchè l'angolo al centro BDC è ad un angolo retto, come l'arco BG alla quarta parte della circonferenza del cerchio; dacchè poi facilmente si deduce, che l'angolo al centro BDC sia a quattro angoli retti, come l'arco BC a tutta la circonferenza del cerchio.

IL FINE.

574814

Digitized by Google

Digitized by Google